Tech. 177 mm

Rejto"

DIE INNERE

REIBUNG DER FESTEN KÖRPER

ALS BEITRAG ZUR

THEORETISCHEN MECH. TECHNOLOGIE

VON

ALEXANDER REJTÖ,

INGENIEUR UND PROFESSOR DER MECH. TECHNOLOGIE AN DER TECHN. HOCHSCHULE ZU BUDAPEST.

AUS DEM UNGARISCHEN ÜBERSETZT

VON

KARL GAUL,

INGENIEUR UND PRIVAT-DOCENT AN DER TECHN. HOCHSCHULE ZU BUDAPEST.

MIT 22 TAFELN.

LEIPZIG

VERLAG VON ARTHUR FELIX.

1897.

375 g

Verlag von **Arthur Felix** in Leipzig.

Studien
in der
Praxis des kaiserl. Patentamtes
von
Dr. E. Hartig,
Geh. Reg.-Rath, Professor der mechan. Technologie am königl. sächsischen Polytechnikum zu Dresden, Mitglied des kaiserl. deutschen Patentamtes.
Mit 35 Textfiguren. In gr. 8. 1890. XII, 279 Seiten. Brosch. Preis ℳ 7,50.

Hydraulik und Hydraulische Motoren
von
Haton de la Goupillière,
Mitglied des französischen Institutes, Chef-Ingenieur für Bergwesen in Frankreich, Prof. für Bergbau- u. Maschinenkunde an der Ecole supérieure des mines in Paris.
Autorisirte Uebersetzung
von
Victor Rauscher,
Ingenieur und Docent an der k. k. Bergakademie in Leoben.
BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS
I. Theil: **Hydraulik.**
Mit 71 Abbildungen. In gr. 8. 1887. IV, 172 S. Brosch. Preis ℳ 6,80.
II. Theil: **Hydraulische Motoren.**
Mit 116 Abbildungen. In gr. 8. 1887. XII, 156 S. Brosch. Preis ℳ 7,20.

Beziehungen
zwischen
Zerreissfestigkeit u. chemischer Zusammensetzung
von Eisen und Stahl.
Von
Hanns Freiherr Jüptner von Jonstorff.
In gr. 8. 1895. 38 Seiten. Brosch. Preis ℳ 1,20.

Beziehungen
zwischen der
Chemischen Zusammensetzung
und den physikalischen Eigenschaften von Eisen und Stahl.
Von
Hanns Freiherr Jüptner von Jonstorff.
In gr. 8. 1896. VIII, 68 Seiten. Brosch. Preis ℳ 2,—.

Die Beurtheilung der Dampfkessel.
Grundlagen für praktische Untersuchungen
von
Georg Schimming,
Ingenieur der Gasanstalt zu Charlottenburg.
In gr. 8. 1896. VII, 158 S. Brosch. Preis ℳ 5,50.

DIE INNERE

REIBUNG DER FESTEN KÖRPER

ALS BEITRAG ZUR

THEORETISCHEN MECH. TECHNOLOGIE

VON

ALEXANDER REJTÖ,

INGENIEUR UND PROFESSOR DER MECH. TECHNOLOGIE AN DER TECHN. HOCHSCHULE ZU BUDAPEST.

AUS DEM UNGARISCHEN ÜBERSETZT

VON

KARL GAUL,

INGENIEUR UND PRIVAT-DOCENT AN DER TECHN. HOCHSCHULE ZU BUDAPEST.

MIT 22 TAFELN.

LEIPZIG

VERLAG VON ARTHUR FELIX.

1897.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorwort.

Den Anstoss zu dieser meiner Arbeit gab mir das Kick'sche Gesetz über die proportionalen Widerstände, der Wirkungswinkel Thime's und die Hinweisung Herrmann Fischer's auf das Molekularnetz.

Von den Studien dieser hervorragenden Forscher und Gelehrten ausgehend, war mein Bestreben, die bleibende Formänderung der Materialien und die hierzu nöthige äussere Kraft zu bestimmen.

Die Formänderung bestimmte ich mit Hilfe des Wirkungswinkels, beziehungsweise durch Annahme der Richtung der Kraftvermittlung.

Mit Hilfe des Wirkungswinkels sind wir im Stande, nicht nur die einfacheren, sondern auch die zusammengesetzteren Erscheinungen der Formänderung im voraus zu bestimmen. Die derartig bestimmten Erscheinungen bei Zug-, Druck-, Scheer- und Lochversuchen stimmen mit den Versuchsresultaten vollkommen überein.

Die zur Formänderung nöthige äussere Kraft bestimmte ich bei langsamer Deformatien mit Hilfe der inneren Reibung, welche ich als absolute Eigenschaft des Materials halte und die ich in Form eines Diagrammes als Funktion der procentualen Maasszunahme (Dehnung) darstelle. Mittelst des Diagrammes der inneren Reibung sind wir im Stande, die nöthige Kraft und Arbeitsmenge jederartigen Beanspruchung zu berechnen. Die derartig berechneten Werthe stimmen mit den Versuchsresultaten immer gut überein.

Die Lösung dieser zwei Aufgaben behandle ich, um Wiederholungen zu vermeiden, gemeinsam.

Schliesslich habe ich auch die analytische Formel der inneren Reibung und mit Hilfe dieser die Kraft- uud Arbeitformeln mehrerer Beanspruchsarten bestimmt. Bezüglich der Ausführung meiner Versuche muss ich bemerken, dass ich die Versuchsresultate von meinem individuellen Einfluss befreien wollte und deshalb weder die Messungen noch die Berechnungen

selbst ausführte. Die genauen Abmessungen der Probekörper wurden von Herrn J. Csonka, Werkmeister am Polytechnikum, die Zeichnungen und Berechnungen aber von Herrn G. Koiss, Assistent am Polytechnikum (mit Beihilfe eines Maschineningenieurs und zweier Hörer des Polytechnikums) durchgeführt. Für die mit grosser Genauigkeit und Verlässlichkeit ausgeführten Arbeiten spreche ich diesen Herren auch hier meinen besten Dank aus.

Endlich erwähne ich, dass die Original-Probekörper und Diagramme von mir aufbewahrt werden und von meinen geehrten Fachgenossen in meinem mechanisch-technologischen Laboratorium jederzeit besichtigt, studirt und überprüft werden können.

Budapest, im October 1896.

Prof. **Alexander Rejtö.**

Inhalt.

I. Einleitung.

II. Grund-Principien.

		Seite
1.	Die inneren Kräfte	3
2.	Die Form (Gestalt) der Moleküle	4
3.	Molekulargruppen-Reibung	5
4.	Beobachtung des Kleingefüges	6
5.	Gebundene Gase, Elasticität, Verdichtbarkeit	7
6.	Richtung der Kraftvermittlung	8
7.	Eintheilung der Materialien	9

III. Beanspruchung ersten Grades.

A. Beanspruchung auf Zug.

8.	Allgemeiner Theil	10
9.	Material I. Gruppe. Sprödes Material mit constantem f, wobei $Nf > p_0$ ist	13
10.	Material II. Gruppe. Bildsames Material mit constantem f, wobei $Nf < p_0$ ist	14
11.	Material III. Gruppe. Material mit constantem f, wobei $Nf = p_0$ ist	15
12.	Gemeinsame Eigenschaften der zähen Materialien	16
13.	Material IV. Gruppe. Zähes, jedoch unbildsames Material mit variablem f, wobei $Nf_{max} > p_0$ ist	24
14.	Material V. Gruppe. Zähes und bildsames Material mit variablem f, wobei $Nf_{max} < p_0$ ist	25
15.	Material VI. Gruppe. Zähes Material mit variablem f, wobei $Nf_{max} = p_0$ ist	27
16.	Versuchsresultate	28

B. Beanspruchung auf Druck.

17.	Allgemeiner Theil	31
18.	Material I. Gruppe. Sprödes Material mit constantem f, wobei $Nf > p_0$ ist	35
19.	Material II. Gruppe. Bildsames Material mit constantem f, wobei $Nf < p_0$ ist	36
20.	Material III. Gruppe. Material mit constantem f, wobei $Nf = p_0$ ist	46
21.	Gemeinsame Eigenschaften der zähen Materialien	47
22.	Material IV. Gruppe. Zähes, jedoch unbildsames Material mit variablem f, wobei $Nf_{max} > p_0$ ist	56
23.	Material V. Gruppe. Zähes und bildsames Material mit variablem f, wobei $Nf_{max} < p_0$ ist	57
24.	Material VI. Gruppe. Zähes Material mit variablem f, wobei $Nf_{max} = p_0$ ist	58
25.	Versuchsresultate	58

IV. Beanspruchung zweiten Grades.

A. Scheeren.

Seite

26. Scheere mit parallelen Schneiden und rechtwinkligem Schneidewinkel. $\angle \varphi = 0^0$, $\angle \alpha = 90^0$ 66
27. Scheere mit schiefer Schneide und rechtwinkligem Schneidewinkel. $\angle \varphi > 0^0$, $\angle \alpha = 90^0$ 70
28. Scheere mit parallelen Schneiden und spitzem Schneidewinkel. $\angle \varphi = 0^0$, $\angle \alpha < 90^0$ 72
29. Scheere mit schiefer Schneide und spitzem Schneidewinkel. $\angle \varphi = 5^0$, $\angle \alpha = 83^0$ 75
30. Versuchsresultate 78

B. Lochen.

31. Lochen mit gleich grossem Stempel und Lochring 82
32. Versuchsresultate 86

V. Rekapitulation der Ergebnisse des graphischen Verfahrens.

33. Die Art der Formänderung 90
34. Die Grösse der Kräfte, welche zur Formänderung nöthig sind 92

VI. Analytische Ableitungen.

35. Formeln der inneren Reibung und der Zähigkeit 96
36. Formeln der Zugbeanspruchung 100
37. Formeln der Druckbeanspruchung 102
38. Formeln der Scheerkraft und deren Arbeit bei Scheeren mit parallelen Schneiden 107

Verzeichniss der Tafeln.

I. Fundamentale Versuche.
II. Das Kleingefüge des Eisens.
III. Beanspruchung auf Zug.
IV. Die Form der Diagramme.
V. Apparat für Zug- und Druckbeanspruchung.
VI. Beanspruchung auf Druck.
VII. Blei.
VIII. Zinn.
IX. Aluminium.
X. Kupferblech von 18 mm Stärke.
XI. Kupferblech von 15 mm Stärke.
XII. Kupferblech von 12 mm Stärke.
XIII. Prima-Kesselblech.
XIV. Secunda-Kesselblech.
XV. Messingblech von 18 mm Stärke.
XVI. Messingblech von 15 mm Stärke.
XVII. Messingblech von 12 mm Stärke.
XVIII. Deltametall.
XIX. Zink und graues Gusseisen.
XX. Scheeren.
XXI. Scheeren und Lochen.
XXII. Lochen.

I. Einleitung.

Karmarsch, der Begründer der systematischen mechanischen Technologie, sowie seine Vorgänger wählten zur Darstellung der Technologie die beschreibende Form. Diese Form eignet sich jedoch zu einer streng wissenschaftlichen Darstellung der Technologie nicht, so dass die beschreibende Technologie der experimentalen mechanischen Technologie den Platz räumen musste.

Die experimentale mechanische Technologie wuchs aus den Versuchs-Ergebnissen Tresca's, Kick's, Thime's, Hartig's und Bauschinger's hervor und ist heute die verbreitetste, obzwar diese den streng wissenschaftlichen Anforderungen auch nicht entspricht, da sie, statt den wahren Grund der Erscheinungen direct zu erforschen, die Erscheinungen nur durch Versuchs-Ergebnisse begründet.

Da wir heute noch immer die experimentale Technologie anwenden, so sei es uns gestattet, die bisherigen Ergebnisse auf diesem Gebiete kurz zu resümiren.

Der erste Experimentator auf diesem Gebiete war Tresca, der bei Formänderung die Erscheinung des Fliessens fester Körper wahrnahm.

Den von Tresca angebahnten Weg betrat auch Fr. Kick, und erzielte hier namhafte Resultate.

Kick experimentirte mit geometrisch ähnlichen Körpern (siehe I. Beilage, Fig. 1 und 2) und fand, dass die zu gleichartigen und proportionalen Formänderungen nöthigen Kräfte sich so verhalten, wie die Grössen der Flächen, und die Arbeitsgrössen so, wie die Volumen dieser Körper. — Kick nennt dieses Gesetz: „Gesetz der proportionalen Widerstände.“*)

Kick theilt auch noch weitere sehr wichtige Resultate mit, so z. B., dass die knetbaren Materialien, wenn sie gegen Stoss elastisch wirken, ihre Elasticität nur den von ihnen eingeschlossenen Luftbläschen verdanken, ferner, dass spröde Materialien unter allseitigem hohen Druck bildsam werden.

Die Versuche mit spröden Materialien führte Kick auf die in Fig. 3, 4 und 5, Taf. I dargestellte Weise durch. In Fig. 3 ist das spröde Material mit Schellack, Schwefel oder Stearin in ein Eisenrohr eingeschmolzen, in welchem sich bei langsamem Druck das spröde Material nach Fig. 4 deformirte.

*) Das Gesetz der proportionalen Widerstände von Fr. Kick, 1885, Leipzig, A. Felix.

In Fig. 5 hat das spröde Material (s) eine flüssige Umhüllung. Das Glasrohr a ist oben und unten durch Kautschuk vollkommen dicht abgeschlossen. Auf das obere Kautschukblatt wirkte der Pressstempel (c_2).

Bemerkenswerth sind auch die Versuche Kick's über das Verhalten dünner Bleiplatten gegen Druck, bei denen sich zeigte, dass entsprechend der Fig. 6, Taf. I, in den mittleren Theilen der Platte der Druck ein höherer ist, als gegen den Umfang zu.

Die experimentale Technologie beruft sich auch häufig auf die Resultate Hartig's, betreffs des Arbeitsmoduls. Hartig meint, dass der Arbeitsmodul, d. h. die Arbeitsfähigkeit bezogen auf die Gewichtseinheit, eine charakteristische Eigenschaft des Materials sei, ebenso auch der Völligkeitsgrad (η) des Schaubildes der Festigkeitsversuche Fig. 7, Taf. I, wo

$$\eta = \frac{a\,d\,e\,b}{a\,m\,e\,b} \text{ ist.}$$

Einen fundamentalen Satz unserer Technologie verdanken wir Thime.*)

Thime hat Versuche (Fig. 8 und 9, Taf. I) mit Werkzeugen von verschiedenem Schneidewinkel durchgeführt. Thime fand, dass Stauchung des Materials nur bis zur Ebene $u\,x$ eintritt, und dass die Richtung dieser Ebene ($u\,x$) zur horizontalen, d. h. der Winkel $\beta + \alpha$, constant sei. Diesen Winkel nennt Thime Wirkungswinkel, und fand bei Metallen für diesen den Werth von $140^0 — 155^0$.

Schliesslich sind noch die Resultate Bauschinger's zu erwähnen. Bauschinger sagt in seinen Mittheilungen von 1892:

α) Die Zugfestigkeit wird von der Querschnittsform nicht beeinflusst.

β) Die Bruchdehnung wächst mit der Querschnittsgrösse und kann die Beziehung zwischen ihr und der Grösse des Querschnittes (F) durch eine Gleichung

$$\delta = \lambda + \varkappa \sqrt{F}$$

dargestellt werden, deren Coëfficienten λ und $\varkappa$ wesentlich von der individuellen Beschaffenheit des Materials abhängen.

γ) Contraction des Querschnittes und Dehnung stehen in keinem nothwendigen Zusammenhang.

δ) Durch Zerreissen wird die Elasticitätsgrenze der Bruchstücke bei gleichem Material auf gleiche Höhe gehoben, unabhängig davon, wie hoch oder wie niedrig sie ursprünglich gelegen war.

Die in bündiger Form zusammengestellten wichtigsten Versuchs-Ergebnisse stehen, wie leicht ersichtlich, nicht immer im Einklange miteinander, ja unter ihnen sind auch directe Gegensätze.

So z. B. widerspricht Kick's Gesetz den Resultaten Hartig's und Bauschinger's. Nach Hartig ist die Arbeitsfähigkeit bei allen Körpern

*) Memoire sur le rabotage des meteaux par Thime. Petersbourg 1877.

mit dem Gewichte, folglich auch mit dem Volumen, proportional, nach Kick hingegen nur bei geometrisch ähnlichen, d. h. bei proportionalen Körpern. Weiterhin ist nach Bauschinger die Reisskraft mit der Grösse des Querschnittes proportional und von der Form unabhängig; nach Kick hingegen steht die Proportionalität nur bei geometrisch ähnlichen Körpern aufrecht. Diese Widersprüche können wir uns aber eben so wenig erklären, als wir auch nicht im Stande sind, den Zusammenhang zwischen den einzelnen Erscheinungen, z. B. zwischen dem Gesetze der proportionalen Widerstände und dem Wirkungswinkel, festzustellen.

Um die mechanische Technologie streng wissenschaftlich behandeln zu können, ist es nothwendig, dass die Technologie eine neue, und zwar eine solche Grundlage erhalte, mit Hilfe deren wir im Stande sind, sämmtliche Erscheinungen zu begründen und den ursächlichen Zusammenhang der Erscheinungen klar zu legen.

Das Bedürfniss nach solch einer Grundlage ist heute schon allgemein.

Von diesem allgemeinen Bedürfnisse gedrängt, versuchte auch ich die Lösung dieser Aufgabe.

Ich habe das Ziel wohl noch nicht erreicht, die Ergebnisse meiner Versuche und Studien sind aber derartige, dass ich es mir zur Pflicht machte, dieselben den hierfür interessirten Kreisen mitzutheilen, um hiermit einen Anstoss geben zu können, dass dieser wichtige Gegenstand zur öffentlichen Besprechung gelange.

Der Ausgangspunkt und die Grundidee meiner Erörterung ist die Molekulare oder innere Reibung.

II. Grund-Principien.

1. Die inneren Kräfte.

Im Nachstehenden beschäftigen wir uns nur mit solchen Deformationen, bei denen unter der Einwirkung äusserer Kräfte auf feste Körper, deren Verdichtbarkeit so gering ist, dass diese vernachlässigt werden kann, ein Gleiten der einzelnen Theilchen der Körper aneinander erfolgt. In Folge dieses Gleitens entsteht bei Deformation jederzeit Reibungsarbeit, welche von der Arbeit der äusseren Kräfte überwunden werden muss. Diese hierbei entstehende Reibung nennen wir innere Reibung.

Bei der Formänderung eines Körpers gleiten nicht nur jene Körpertheilchen, welche unmittelbar der Wirkung der äusseren Kräfte unterliegen, sondern auch viele andere. Da aber ein Gleiten bei festen Körpern nur durch äussere Kräfte hervorgerufen werden kann, so ist es klar, dass die Körpertheilchen die Wirkung der äusseren Kräfte auch zu übertragen im Stande sind.

Die Uebertragung der Wirkung der äusseren Kräfte kann nur durch innere Molekularkräfte geschehen, die wir unter dem Namen: Molekulare Anziehungskraft (Cohäsion) und Molekulare Abstossungskraft (Expansion) kennen.

Aus dem Gesagten folgt, dass wir im Allgemeinen die Cohäsions- und die Expansionskraft und bei Einwirkung von äusseren Kräften auch die als Widerstand auftretende innere Reibung zu unterscheiden haben.

Diese drei inneren Kräfte, beziehungsweise das Verhältniss dieser, beeinflussen die mechanischen Eigenschaften des Materials.

Wir wissen, dass ein Gleiten nur dann eintreten kann, wenn die Wirkung der äusseren Kraft die innere Reibung, ein Bruch nur dann, wenn die Wirkung der äusseren Kraft die Cohäsionskraft zwischen den einzelnen Theilchen überwunden hat.

Man kann also sagen, dass bei bildsamen Materialien, so lange diese keinen Bruch erleiden, die Cohäsion grösser sein muss, als die innere Reibung, und bei spröden Materialien, da sie nicht formbar sind, die innere Reibung grösser sein muss, als die Cohäsion.

Hieraus ist ersichtlich, dass das Verhältniss der inneren Kräfte wirklich die Eigenschaften des Materials beeinflusst.

Nachdem, wie wir bisher gesehen haben, die innere Reibung von grosser Bedeutung ist, so halten wir es angezeigt, uns mit derselben näher zu befassen.

Von der inneren Reibung wissen wir nur so viel, dass dieselbe, so wie jede andere Reibung, vom normalen Drucke N und vom Reibungscoëfficienten f, und der Letztere von der Form der Berührungsflächen abhängt.

Um nun einen klaren Begriff über die innere Reibung zu erhalten, ist es nothwendig, dass wir vorerst die Berührungsflächen, d. h. die Form der gleitenden Körpertheilchen näher betrachten.

2. Die Form (Gestalt) der Moleküle.

Ueber die möglichen Formen der Moleküle giebt uns die Stereochemie*) einige Andeutung.

Mit der gewöhnlichen Structurformel, d. h. mit den ebenen Formelbildern der Chemie, ist es nicht möglich die Entstehung der Isomerie zu begründen, hingegen mit Hilfe der Stereochemie ist dies sehr einfach.

Die Stereochemie stellt die Formelbilder als räumliche dar, und zwar die Kohlenstoffverbindungen als ein reguläres Tetraëder. Van't Hoff nimmt nämlich an, dass die mit dem asymetrischen Kohlenstoffatom verbundenen

*) Stereochemie nach J. H. van't Hoff. Leipzig 1892 von Dr. W. Meyerhoffer.

vier Gruppen sich an den Ecken des regulären Tetraëders, und das Kohlenstoffatom in dessen Centrum befinden.

Die vier Gruppen können an den Ecken zwei verschiedene relative Stellungen einnehmen — wie sie Fig. 10, Bild I und II Taf. I darstellen —, welche, weil sie nicht zur Deckung gebracht werden können, die Isomerie deutlich versinnlichen.

Die Isomerie bei zwei assymetrischen Kohlenstoffatomen stellt van't Hoff mit dem Bilde III, IV und V, und bei drei assymetrischen Kohlenstoffatomen mit dem Bilde VI dar.

Da van't Hoff die Richtigkeit der Stereochemie mit zahlreichen Versuchen bestätigt hat, so sind wir berechtigt anzunehmen, dass die Moleküle geometrische Formen besitzen, die entweder einem regulären Polyeder entsprechen, eventuell sich der Kugelform annähern, oder als eine Gruppirung von mehreren Polyedern sich darstellen.

In letzterem Falle besitzen die Moleküle Verzweigungen und Vertiefungen.

Nachdem wir auf diese Art von der Verschiedenheit der Gestalt der Moleküle ein Bild bekommen haben, so können wir hieraus auch auf das Wesen und den Werth der inneren Reibung schliessen.

Bei regelmässigen Polyedern, insbesondere aber bei annähernder Kugelform, kommen immer gleichartige Flächen in Berührung, und wird in diesem Falle die innere Reibung und somit auch der Reibungscoëfficient einen constanten Werth haben.

Bei Molekülen mit Verzweigungen hingegen kommen verschiedenartige Flächen miteinander in Berührung. Hier greifen die vorstehenden Theile eines Moleküls in die Vertiefungen des anderen und verursachen hierdurch die Vergrösserung des Reibungscoëfficienten. In diesem Falle ist also der Reibungscoëfficient von variablem, und zwar um so grösserem Werthe, je inniger der Eingriff ist.

Wenn nun der Reibungscoëfficient von dem Grade des Eingriffes, also von der relativen Lage der benachbarten Moleküle abhängt, so folgt hieraus, dass dessen Werth bei derselben Lagerung immer derselbe sein muss, ohne Berücksichtigung der Art und Weise, nach welcher die Moleküle in diese Lage gelangt sind.

Als Schlussfolgerung können wir somit sagen, dass der Reibungscoëfficient (f) bei einigen Materialien constant, bei anderen Materialien variabel ist, und dass im letzteren Falle sein Werth von der Lagerung der Moleküle abhängt.

3. Molekulargruppen-Reibung.

Da die Moleküle verschiedene Gestalten haben, so bilden dieselben oft ein derartiges Gefüge, dass nur einige Moleküle in innigste Berührung kommen, wo dann die in innigster Berührung stehenden Moleküle Gruppen bilden.

Die Oberfläche der Gruppen kann ganz andersartige Unebenheiten besitzen, als die Moleküle selbst, und kann deshalb der Reibungscoëfficient dieser einen ganz anderen Werth haben, als der der Moleküle. Die Gruppirung der Moleküle nennt man das Gefüge.

Aus dem Gesagten folgt, dass die mechanischen Eigenschaften eines Materials nicht nur von der Form und Gestalt der Moleküle, sondern auch von dem Gefüge abhängen, da bei der Deformation Gleitung nicht nur zwischen den Molekülen, sondern auch zwischen den Molekulargruppen stattfinden kann. Beide Reibungsarten bilden die innere Reibung.

Da der Reibungscoëfficient von der Form der Oberfläche der sich berührenden Theile abhängt, so könnte man hieraus sofort auf dessen Werth folgern, wenn man die Form der Moleküle und der Molekulargruppen kennen würde.

Die Form der Moleküle können wir aber bisher noch nicht beobachten, da ihr Längenmaass, wie sich aus der Theilbarkeit der Farbstoffe ergeben hat, kleiner als der zehntausendste Theil eines Millimeters ist. Die mechanischen Molekulargruppen jedoch, die das Kleingefüge des Materials bilden, sind in den meisten Fällen mittelst Mikroskop gut beobachtbar.

4. Beobachtung des Kleingefüges.

Mit der Beobachtung und Untersuchung des Kleingefüges befasst sich die Metallmikroskopie, und seien hier einige Beispiele angeführt, um zu zeigen, dass das Gefüge deutlich sichtbar ist und dass dies die Eigenschaften des Materials beeinflusst.

Taf. II stellt acht mikrophotographische Abbildungen des kohlenstoffhaltigen Eisens in 130facher Vergrösserung dar.

Fig. 1 und 2 sind Bilder eines Schalen- oder Hartgusses. Die weissen Flecken zeigen die sogenannte Lösungs- oder Härtungskohle, die aber nicht nur aus Eisen-Kohlenlösung, sondern auch aus Eisen-Silicium- und Mangan-Kohlenlösung besteht.

Die anderen Theile zeigen das Gemenge von Temperkohle, Carbid und die an Kohlenstoff ärmer gewordene Lösungskohle.

Fig. 5 ist das Bild eines kohlenstoffreichen Stahles in rohem, d. h. nicht gehämmertem Zustande. In diesem sind grosse weisse Flecken zu sehen, welche die Gruppen der Härtungskohle bezeichnen; diese sind aber so eingebettet, dass sie einander nicht berühren; hingegen sehen wir in Fig. 6, welche das Bild desselben Stahles in raffinirtem, d. h. gehämmertem Zustande darstellt, die Härtungskohle schon so vertheilt, dass auch zwischen den Gruppen der Härtungskohle Reibung entstehen kann, wodurch die Eigenschaften des Materials beeinflusst werden.

Ebenso ist der Einfluss. des Gefüges bei Flusseisen ersichtlich.

In Fig. 7, welche das Bild eines nicht gehämmerten Flusseisens zeigt, ist die Härtungskohle in grösseren Gruppen zu sehen.

In Fig. 8, welche das Bild des gehämmerten Flusseisens darstellt, ist die Härtungskohle gut vertheilt.

5. Gebundene Gase, Elasticität, Verdichtbarkeit.

Von den Molekülen und Molekulargruppen wissen wir, dass dies Körper von verschiedener Form sind.

Zufolge ihrer Form wird nur selten jener Fall vorkommen, dass sämmtliche Moleküle und deren Gruppen sich dicht aneinander anschliessen, und den Raum vollständig ausfüllen, sondern es werden in den meisten Fällen zwischen ihnen Lücken bleiben, die mit gasförmigen Stoffen ausgefüllt sind.

Dass in den Lücken nicht nur der sogenannte „Aether“, sondern auch bekannte Gase vorhanden sind, haben schon viele bewiesen, unter Anderen auch Osmond und Werth.*)

Nach diesen Experimentatoren absorbirt z. B. Stahl grosse Mengen von Wasserstoff, Stickstoff und Kohlenoxyd, und zwar umsomehr, je höher dessen Temperatur ist.

Diese Gase sollen von der Anziehungskraft der Moleküle so stark gebunden sein, dass sie aus den Lücken trotz ihrem grösseren inneren Drucke nicht entweichen können.

Osmond und Werth fanden nämlich, dass im flüssigen Stahle so viel Gase sind, dass deren Rauminhalt bei gewöhnlicher Temperatur das 15 bis 20fache Volumen des flüssigen Stahles beträgt.

Hieraus kann man nun schliessen, dass in den Lücken zwischen den Molekülen gebundene Gase sind, die auch bei grösserer innerer Pression nicht leicht entweichen können.

Die Grösse der intermolekularen Lücken hängt theilweise von der Form, theilweise von der relativen Lage der Moleküle und Molekulargruppen ab.

Die relative Lage der Moleküle ändert sich bei jeder Deformation, und es ändert sich hierdurch auch die Grösse der Lücken, wodurch die gebundenen Gase entweder gepresst werden oder diese expandiren.

Zufolge der molekularen Anziehungskraft bestreben sich die Gase, ihren anfänglichen Gleichgewichts-Zustand beizubehalten und verschieben deshalb, sobald die äussere Kraft aufgehoben wird, die Moleküle so weit, bis die Lücken wieder ihre anfänglichen Grössen erlangt haben.

Da die durch die inneren Kräfte hervorgebrachte Verschiebung der Moleküle Elasticität genannt wird, so folgt hieraus, dass die Elasticität das Arbeiten der gebundenen Gase ist.

Zu diesem Schlusse gelangten wir, weil wir annahmen, dass bei jeder Deformation die Grösse der Lücken sich ändert. Um die Richtig-

---

*) Constructions metalliques élasticité et resistance des materiaux fonte, fer et acier par Jean Résal, Paris 1892.

keit dieser Annahme zu beweisen, betrachten wir ein System von Molekülen näher.

Der Einfachheit halber denken wir uns die Moleküle kugelförmig, wie dies in Fig. 11, Taf. I dargestellt ist. In diesem Systeme berühren sich die Kugeln I, II, VI, VII, dann II, III, IV, VIII und IV, V, VI, IX und bilden Tetraëder, weshalb die von ihnen eingeschlossenen Lücken tetraëdrische Lücken genannt werden können.

Ausserdem entsteht durch die Berührung der drei Tetraëder auch ein Octaëder, und zwar durch die Kugeln IV, VI, VII, VIII, II und IX, welche eine octaëdrische Lücke einschliessen.

Sobald dieses Kugelsystem verschoben wird, vermindert sich die octaëdrische und vergrössern sich die tetraëdrischen Lücken.

Aus den Versuchen von Osmond und Werth wurde ersichtlich, dass manche Materialien umsomehr Gase absorbiren, je höher ihre Temperatur ist.

Wenn bei Abkühlung solcher Materialien die überschüssigen Gase, aus welch einem Grunde immer, nicht entweichen können, so bilden sie Blasen. Die in den Blasen befindlichen Gase sind nur mechanisch gehalten und können, wenn das Material im bildsamen Zustande ist, durch langsamen Druck entfernt werden, wodurch das Material verdichtet wird. Durch heftige Stösse aber wird sich das Material nur in geringem Maasse verdichten, weil die Gasblasen sich so wie elastische Puffer verhalten. (Siehe Versuche Kick's.)

6. Richtung der Kraftvermittlung.

Die Uebertragung der äusseren Kraftwirkung geschieht, wie bekannt, mittelst der inneren Kräfte und muss deshalb die Richtung der Kraftübertragung mit der Richtung der inneren Kräfte übereinstimmen. Nachdem die inneren Kräfte von den Massen abhängig sind, so ist als deren Sitz (Angriffspunkt) der Schwerpunkt der Moleküle, und als deren Richtung die Verbindungslinie der Schwerpunkte der Moleküle zu betrachten.

Die Verbindungslinien der Schwerpunkte bilden ein regelmässiges Skelett oder Gittersystem, dessen Schnitt mit einer Ebene ein Netz ist, wie es Fig. 12, Taf. I darstellt.

Diese netzartige Darstellung theilte H. Fischer in der neuen Auflage der mechanischen Technologie von K. Karmarsch schon im Jahre 1888 mit.

Aus dem Kraftnetze ist ersichtlich, dass die Kraftübertragung in der Ebene, in den Verbindungslinien der Schwerpunkte geschieht. Nachdem die Richtung der Verbindungslinien von der Form der Moleküle abhängt, diese aber bei einem und demselben Material eine charakteristische ist, darf man sagen, dass die Richtung der Verbindungslinie, folglich auch die Richtung der Kraftübertragung für das Material charakteristisch sei.

Die Neigung der Richtung der Kraftübertragung zur Richtung der äusseren Kraft werden wir in Folge kurz Wirkungswinkel nennen;

dieser bildet, wie oben gesagt, eine charakteristische Eigenschaft des Materials.

In Fig. 12 haben wir den Wirkungswinkel nach beiden Richtungen gleich gross genommen, und werden dies der Einfachheit halber auch weiterhin so annehmen, obzwar wir dieselben Resultate erhalten, wenn wir verschieden grosse Winkel annehmen würden.

7. Eintheilung der Materialien.

Die mechanischen Eigenschaften des Materials sind theils vom Charakter des Reibungscoëfficienten (f), theils von dem Verhältnisse der Grösse der Reibung zu der der Cohäsion (p_0) bedingt.

Demzufolge kann man die Materialien ihren mechanischen Eigenschaften entsprechend, je nachdem der Reibungscoëfficient f constant oder variabel ist, in **zwei** Hauptgruppen, und jede Hauptgruppe dem Verhältnisse $N \cdot f \lessgtr p_0$ entsprechend in **drei** Untergruppen theilen.

Sämmtliche festen Materialien, unbeachtet deren Ursprung (folglich die Metalle, Hölzer, Faserstoffe u. s. w.), werden wir in folgende 6 Gruppen theilen:

I. Materialien, deren Reibungscoëfficient (f) constant und
   1. $N \cdot f > p_0$
   2. $N \cdot f = p_0$
   3. $N \cdot f < p_0$

II. Materialien, deren Reibungscoëfficient (f) variabel und
   4. $N \cdot f_{\max.} > p_0$
   5. $N \cdot f_{\max.} = p_0$
   6. $N \cdot f_{\max.} < p_0$.

In Betracht ist hier noch zu ziehen, dass in jenen Fällen, wo krystallinische Gruppen (Grobgefüge) vorhanden sind, bei manchen Beanspruchungen der Reibungscoëfficient der Moleküle, bei anderen der der Molekulargruppen zur Geltung gelangt, weshalb wir diese in eine dritte Hauptgruppe einreihen, welche wir Gruppe mit combinirtem Reibungscoëfficient nennen.

III. Beanspruchung ersten Grades.

Die Wirkung und demzufolge auch die Grösse der äusseren Kraft hängt von der Art und Weise der Beanspruchung ab.

Die einfachste Art der Beanspruchung eines Körpers geschieht durch Zug oder Druck. Diese beiden Beanspruchungen bilden die Grundlage aller anderen, weshalb wir diese Beanspruchungen erster Ordnung nennen wollen.

A. Beanspruchung auf Zug.

8. Allgemeiner Theil.

Um die Zugbeanspruchung einfach darstellen zu können, nehmen wir an, dass das Versuchsstück die Gestalt eines Kreiscylinders habe, dass die Zugkraft gleichmässig vertheilt sei und schliesslich, dass die Zugkraft nur langsam wächst, also innerhalb sehr kurzer Zeitintervallen als constant betrachtet werden kann.

Indem die Uebertragung der äusseren Kraft in der Richtung des Wirkungswinkels geschieht, zeichnen wir vor allem das Molekularnetz unseres Versuchsstückes auf, wie es Fig. 21, Taf. III zeigt, welche den Stab im Längenschnitte darstellt.

Die gleichmässig vertheilten Zugkräfte wirken auf die Moleküle der Endflächen ab und $a'b'$. Nachdem aber diese Moleküle die Kraft nur in der Richtung des Wirkungswinkels vermitteln können, so ist es nothwendig, dass wir vorerst die äusseren Kräfte in solche Komponenten zerlegen, deren Richtung mit der Richtung der Wirkungswinkel übereinstimmt.

Jede Komponente wirkt auf alle in ihrer Richtung liegenden Moleküle, was wir durch Kraftlinien (Kraftsymbole) ersichtlich machen können.

Demzufolge zeichnen wir die Kraftlinien von den Endpunkten in der Richtung des Wirkungswinkels, also vom Punkte a ausgehend bis g, vom Punkte b bis e, ferner von a' bis g' und von b' bis e', dann von den übrigen Molekülen der Endflächen in beiden Richtungen der Wirkungswinkel, wie es Fig. 21, Taf. III darstellt.

Wenn wir nun die Kraftsymbole näher betrachten, so sehen wir, dass auf jene Moleküle, welche in den Theilen abc und $a'b'c'$ liegen, zwei Kräfte wirken, deren Resultirende der Richtung der Zugkraft folgt, weshalb diese Theilchen so betrachtet werden können, als wenn sie an die äussere Kraft gebunden wären.

Ferner bemerken wir noch, dass auf die Moleküle der Theile ace, bcg, $a'c'e'$ und $b'c'g'$ nur je eine Kraftkomponente einwirkt, und zwar in der Richtung des Wirkungswinkels, zufolge dessen diese Moleküle bestrebt sind, sich der Mittelachse des Versuchskörpers zu nähern und zugleich auch der Richtung der Zugkraft zu folgen.

Diesem Bestreben widersteht die innere Reibung. So lange diese grösser ist, als die Wirkung der äusseren Kraft, verändern die Moleküle ihre Lage nicht, doch wird die Reibung $(N \cdot f)$ dieser Theile grösser, als die der Weiterliegenden, auf welche die Kraftwirkung noch nicht übergegangen ist, weil die Wirkung der äusseren Kraft den Normaldruck (N) zwischen den einzelnen Theilchen vergrössert.

Zufolge der grösseren inneren Reibung sind diese Theile jetzt fester gebunden, als die dazwischen liegenden, weshalb man auch diese als an die äussere Kraft gebunden betrachten kann.

In der nächsten Periode der fortpflanzenden Einwirkung der Zugkraft werden demnach die in $e c g$ und $e' c' g'$ liegenden Moleküle als Angriffspunkte der äusseren Kräfte zu betrachten sein, weshalb wir die Kraftlinien von diesen Molekülen ausgehend ganz so auftragen müssen, wie vorhin von den Molekülen der Grenzebenen.

Aus der ergänzten Figur ist nun ersichtlich, dass auf die Moleküle der Theile $e c g h$ und $e' c' g' h'$ je zwei Kräfte wirken, deren Resultirende der Richtung der Zugkraft folgt. Es werden also auch diese als an die äussere Kraft gebunden erscheinen.

Wir bemerken ferner noch, dass auf die Moleküle der Theile $e h m$, $g h n$, $e' h' m'$ und $g' h' n'$ nur je eine, aber in schiefer Richtung wirkende Kraftkomponente einwirkt, zufolge deren diese Moleküle wieder bestrebt sind, sich der Mittelachse des Versuchskörpers zu nähern und zugleich auch der Richtung der Zugkraft zu folgen.

Diese letztgenannten Theile sind nun gleichen Verhältnissen unterworfen wie die Theile $a c e$, $b c g$ u. s. w., weshalb diese, in Folge der Vergrösserung der Normalen (N), durch die Reibung fester gebunden sind, als jene weiter gegen die Mitte zu liegenden, und werden deshalb in der nächsten Zeitperiode die äussere Kraft auf diese übertragen. Als Angriffspunkte der äusseren Kraft werden jetzt die Moleküle der Theile $m h n$ und $m' h' n'$ dienen, weshalb wir die Kraftlinien in der bekannten Weise von diesen Molekülen ausgehend auftragen müssen.

Auf diese Art verfahren wir auch weiter, bis endlich die anfängliche Zugkraft ihre Wirkung auf sämmtliche Moleküle des Versuchsstückes ausübt.

Nehmen wir nun an, dass die Zugkraft sich etwas vergrössert und dass sie diesen vergrösserten Werth im Laufe einer kurzen Zeitdauer constant beibehält.

Die Wirkung der neu hinzugekommenen Kraftmenge müssen wir, von den Molekülen der Grenzebenen $a b$ und $a' b'$ ausgehend, ebenso darstellen, wie oben die Wirkung der anfänglichen Kraft. Hieraus wird ersichtlich, dass die Theile $a b c$ und $a' b' c'$ der Richtung des Werkzeuges (d. h. der Richtung der Kraft) folgen wollen, während die Theile $a c e$, $b c g$, $a' c' e'$, $b' c' g'$ sich auch nach der Mittelachse bewegen, also deformiren wollen. So lange aber die innere Reibung grösser ist als die Wirkung der äusseren Kraft, sind diese Theile, wie wir früher gezeigt haben, gebunden und übertragen daher die äussere Kraft auf die weiter innen liegenden Moleküle. Wir verfahren deshalb jetzt so wie früher, bis die Mehrkraft ihre Wirkung wieder auf sämmtliche Moleküle ausübt. Erst nachdem dies geschehen, kann die Kraftmenge wieder vermehrt werden und der oben erwähnte Vorgang wiederholt sich abermals. Dieser Process der Kraftvermehrung und deren Uebertragung auf die Moleküle des Körpers kann so lange fortgesetzt werden, bis die äussere Kraftwirkung die innere Reibung überwindet.

Auf Grund dieser Umstände können wir behaupten, dass beim Zug, so lange die innere Reibung der einzelnen Theilchen grösser ist als die Wirkung der äusseren Kräfte, der Versuchsstab in seiner ganzen Masse gleichmässig beansprucht ist und keine bleibende Deformation erleidet, ferner, dass die Wirkung der äusseren Kraft sich von Molekül zu Molekül fortpflanzt. Bei dieser Behauptung setzen wir voraus, dass die Einwirkung der äusseren Kraft nur allmählich geschieht, also bei der Beanspruchung des Materials keine heftigen Stösse vorkommen. Bei letzterer Art der Beanspruchung tritt die Wirkung der lebendigen Kraft ein, welche die Festigkeitsverhältnisse auf ganz andere Weise beeinflussen. Einen Theil der schädlichen Wirkung von Stössen auf Körper mit stark variablem Querschnitt hingegen kann man aus unserer Darstellung der Kraftübertragung erklären.

Nehmen wir an, dass der Querschnitt sich so stark verändert, wie es Fig. 25, Taf. III zeigt. In diesem Falle wird die Wirkung der äusseren Kräfte vom Molekül a bis h und von b bis i übertragen; da aber jene Moleküle, die zwischen g und h liegen, als auch die zwischen c und i liegenden von den Gruppen $g\,h\,k$ und $c\,i\,l$ in ihrer Bewegung gehemmt werden, so folgt hieraus, dass die im grossen Querschnitte liegenden Moleküle jene Grösse der Beschleunigung momentan nicht annehmen können, welche die Moleküle des kleineren Querschnittes aufzunehmen im Stande sind. Es widersteht also der grössere Querschnitt der Uebergangsfläche heftigen Stössen schlechter als der kleinere.

Der gefährliche Querschnitt des in oben genannter Figur dargestellten Körpers befindet sich also in $l\,e\,g\,k$, d. h. am Uebergange der Querschnitte.

Den erörterten Uebelstand kann man umgehen, sobald man darauf achtet, dass die Steigung der Uebergangslinien vom kleineren zum grösseren Querschnitte den Wirkungswinkel nicht überschreite, weil dann alle Theile der Beschleunigung frei folgen können.

Bei der Untersuchung der Kraftübertragung haben wir öfters erwähnt, dass eine Formänderung erst dann entstehen kann, wenn die Wirkung der äusseren Kraft grösser ist als die innere Reibung.

Bekanntlich wird jene maximale äussere Kraft, die wohl noch keine bleibende Formänderung hervorruft, bei deren Ueberschreiten aber schon bleibende Formänderung eintritt, Elasticitätsgrenze genannt. Es folgt daher, dass die Elasticitätsgrenze von dem Werthe der inneren Reibung abhängt.

Jene Materialien, die unseren Voraussetzungen vollständig entsprechen und deren Moleküle bis zur Elasticitätsgrenze gar keine Verschiebung erleiden, nennt man unelastische. Den Gegensatz dieser bilden die elastischen Materialien, bei denen bis zur Elasticitätsgrenze keine bleibende, sondern eine nach der Entlastung von den gebundenen Gasen wieder aufgehobene Verschiebung stattfindet.

Diese elastische Verschiebung beweist, dass die Wirkung der äusseren Kraft schon vom Anfange an gleich gross sein muss mit der Reibung und die Reibungsarbeit wieder kleiner oder gleich gross mit der Arbeit der gebundenen Gase. Hieraus folgt, dass die elastischen Körper, unseren Voraussetzungen, streng genommen, nicht Genüge leisten. Da die mechanische Technologie sich mit den elastischen Formänderungen nicht befasst, und da bezüglich der bleibenden Formänderung jener Zustand, bei welchem die Reibungsarbeit die Arbeit der gebundenen Gase noch nicht überschreitet, von gar keinem Einflusse ist, so werden wir bezüglich der bleibenden Formänderung die elastischen Materialien so betrachten, als wenn sie unseren Voraussetzungen vollkommen entsprechen würden.

Auf Grund der hier vorgeführten allgemeinen Bemerkungen könnten wir nun zur Untersuchung der einzelnen Materialgruppen schreiten.

Hierzu benöthigen wir jenes Bild der Kraftvermittlung, welches in Fig. 21, Taf. III dargestellt ist. Da aber dessen Herstellung sehr langwierig ist, so wollen wir sehen, ob es nicht möglich wäre, das Ziel auf einfachere Weise zu erreichen.

Wir sehen in Fig. 21, Taf. III, dass die gleichmässig beanspruchten Theile des Probestabes durch die von den Endpunkten aus gezogenen Schenkel der Wirkungswinkel begrenzt sind. Wir brauchen daher nur von den Endpunkten a, b, a', b' unter Winkel β gerade Linien zu ziehen, bis diese die obere und untere Grenzlinie des Stabes in c' und g' schneiden. Von diesen Schnittpunkten aus ziehen wir abermals je eine Gerade unter demselben Winkel, wie dies Fig. 22, Taf. III darstellt. Diese Construction setzen wir, von beiden Endflächen ausgehend, so lange fort, bis wir zur Längenmitte gelangen. Zur Versinnlichung der Beanspruchung derjenigen Theile, welche die Richtung der äusseren Kraft folgen, schraffiren wir diese mit horizontalen Linien und jene, in denen die Kräfte das Bestreben haben, die Theile zu deformiren, wollen wir vertical schraffiren. (Siehe Fig. 23, Taf. II.)

Untersuchen wir nun die einzelnen Materialgruppen in Bezug auf ihr Verhalten bei Beanspruchung auf Zug.

9. Material I. Gruppe.

Sprödes Material mit constantem f, wobei $N \cdot f > p_0$ ist.

Im Allgemeinen wissen wir, dass, so lange die Wirkung der äusseren Kraft den Werth der inneren Reibung nicht erreicht, sämmtliche Moleküle gleichmässig beansprucht sind und dass Deformation nur dann entstehen kann, wenn die äussere Kraft die innere Reibung überschritten hat. Da aber bei dieser Gruppe die Cohäsion (p_0) kleiner ist als die innere Reibung ($N \cdot f$), so kann die Wirkung der äusseren Kraft hier nie die Höhe der inneren Reibung erreichen, sondern nur die der Cohäsion, demzufolge reisst der Stab, ohne eine Deformation erleiden zu können.

Materialien, die sich derart verhalten, nennt man spröde.

Bei sprödem Material ist die Zugfestigkeit, da keine Formänderung entsteht, gleich gross mit der Cohäsion jener Moleküle, die sich auf der Flächeneinheit des Querschnittes befinden, d. h.

$$p = p_0.$$

Das Schaubild dieser spröden Körper entspricht entweder dem in Fig. 1 oder Fig. 3, Taf. IV dargestellten Bilde, je nachdem das Material unelastisch oder elastisch ist.

10. Material II. Gruppe.

Bildsames Material mit constantem f, wobei $N \cdot f < p_0$ ist.*)

So lange die Wirkung der äusseren Kraft den Werth der inneren Reibung nicht erreicht, wird die Kraft auf die schon mitgetheilte Art übertragen. Sobald aber die äussere Kraft die innere Reibung überschreitet, können jene Theile, auf welche nur Komponenten einer Richtung wirken, also diejenigen, welche in Fig. 23, Taf. III senkrecht schraffirt sind, der Wirkung der äusseren Kräfte folgen, d. h. deformiren.

Die senkrecht schraffirten Theile sind jedoch alle gleich lang, wie dies aus Fig. 23 und 26 ersichtlich ist.

Wenn δ der Durchmesser des Versuchsstabes ist, so kann man diese Länge mit Formel $\delta \operatorname{ctg} \beta$ ausdrücken.

Sobald eines dieser senkrecht schraffirten Theile zu deformiren beginnt, z. B. in Fig. 26 der Theil $k\,l\,o\,m\,n$, so vermindert sich dessen Querschnitt und es entfällt daher bei diesem eine grössere Kraftwirkung auf die Querschnittseinheit als bei den nicht deformirten Theilen.

Bei weiterer Beanspruchung wird daher nur dieser mehr belastete Theil deformiren und die Form ($k\,l\,o\,m\,n\,o'$) der Fig. 27, Taf. III annehmen.

Bei Materialien dieser Gruppe wird also nur ein Theil des Stabes, von der Länge $\delta \operatorname{ctg} \beta$, seine Form verändern, es wird also nur eine partiale Deformirung stattfinden, welche man Contraction nennt. Die Verlängerung dieses Theiles ist die contractionelle Dehnung (s).

Die contractionelle Dehnung (s) hängt nicht nur von der Länge ($\delta \operatorname{ctg} \beta$) des deformirenden Theiles, sondern auch von der Grösse der inneren Reibung, also von der Beschaffenheit des Materials ($\varkappa$) ab, weshalb ihre Formel

$$s = \varkappa\, \delta \operatorname{ctg} \beta \text{ ist.}$$

Bei kreisförmigem Querschnitte kann man diese Formel folgendermassen schreiben:

$$s = \varkappa \operatorname{ctg} \beta \sqrt{\frac{4}{\pi}} \sqrt{\frac{\delta^2 \pi}{4}}$$

---

*) Um klar darzustellen, dass die Anfangsverhältnisse bei der Beanspruchung jeden Materials dieselben sind, wollen wir die folgende Einleitung bei der Besprechung der weiteren Gruppen möglichst beibehalten.

und wenn anstatt

$$\varkappa \operatorname{ctg} \beta \sqrt{\frac{4}{\pi}} = \varkappa_1$$

gesetzt wird und anstatt

$$\frac{\delta^2 \pi}{4} = \Delta,$$

so ist

$$s = \varkappa_1 \sqrt{\Delta}.$$

Diese Formel sagt uns, dass die contractionelle Dehnung mit der Quadratwurzel des Querschnittes proportional ist.

Die Zugdiagramme der Materialien dieser Gruppe beginnen entweder mit einer Senkrechten (Fig. 2, Taf. IV) oder mit einer schiefen Geraden (Fig. 4, Taf. IV), je nachdem das Material unelastisch oder elastisch ist; an diese schliesst sich eine herabfallende Linie an, die eventuell mit einer kurzen Wagrechten beginnt.

Den letztgenannten Theil besitzt das Schaubild nur dann, wenn die zur Reibungsarbeit der contrahirenden Moleküle nothwendige Kraft mit der Verminderung des Querschnittes proportional ist. Der herabfallende Theil erstreckt sich nur dann bis zur Nulllinie, wenn das Verhältniss $p_0 > N \cdot f$ sich nicht ändert.

Sobald aber zufolge der Reibungsarbeit das Material sich stark erwärmt, vermindert sich die Cohäsion und es wird

$$p_0 < N \cdot f,$$

weshalb der Stab reisst.

11. Material III. Gruppe.

Material mit constantem f, wobei $N \cdot f = p_0$ ist.

So lange die Wirkung der äusseren Kraft den Werth der inneren Reibung nicht erreicht, wird die Kraft auf die schon mitgetheilte Art übertragen.

Sobald aber die äussere Kraft die Grösse der inneren Reibung erlangt hat, erreicht sie unseren Voraussetzungen zufolge auch die Grösse der Cohäsion und kann deshalb durch die weitere Kraftausübung entweder die innere Reibung oder die Cohäsion überwunden werden. Im ersten Falle contrahirt der Stab, im zweiten zerreisst er ohne zu contrahiren.

Die äussere Kraft kann man also, wenn das Material nicht contrahirt, durch folgende Formel ausdrücken:

$$P = N \cdot f \Delta = p_0 \Delta$$

folglich

$$\frac{P}{\Delta} = p_0 = N \cdot f.$$

Beim Auftreten von Contraction wird die äussere Kraft etwas grösser, da zur Reibungsarbeit der contrahirenden Moleküle auch noch eine gewisse Kraft nothwendig ist.

12. Gemeinsame Eigenschaften der zähen Materialien, d. h. jener, welche variablen Reibungscoëfficient haben.

So lange die Wirkung der äusseren Kraft kleiner ist als der Werth der inneren Reibung, erstreckt sich diese Wirkung auf den ganzen Stab, ohne eine bleibende Verschiebung der Moleküle hervorzubringen.

Sobald aber diese den Werth der inneren Reibung überschreitet, wird deren Mehrwerth nach der schon bekannten Regel die Theile $a\,b\,c$ und $a'\,b'\,c'$ der Fig. 21, Taf. III in der Richtung der Zugkraft bewegen und zwar derart, als ob diese Theile an das Werkzeug gebunden wären, die Theile $a\,c\,e$, $b\,c\,g$, $a'\,c'\,e'$ und $b'\,c'\,g'$ aber verschieben, weil auf diese schief wirkende Komponente wirken.

In Folge der Verschiebung wächst nach unserer Voraussetzung in diesen Theilen der Reibungscoëfficient (f) und wird deshalb hier der Werth der Reibung wieder grösser als die Wirkung der äusseren Kraft.

Die genannten Theile werden von der vergrösserten Reibung fester gebunden als die weiter liegenden, weshalb sie die Wirkung der äusseren Kraft übertragen. Die Theile $c\,g\,h\,e$ und $c'\,g'\,h'\,e'$ werden daher der Richtung der Zugkraft folgen, die Theile $e\,h\,m$, $g\,h\,m$ und $e'\,h'\,m'$, $g'\,h'\,m'$ aber so lange deformiren, bis sie von der wachsenden Reibung gebunden und zur Uebergabe der Wirkung der äusseren Kraft befähigt werden.

Auf diese Art übertragen die vertikal schraffirten Theile die Wirkung der äusseren Kraft fortlaufend, bis schliesslich der ganze Stab der Einwirkung der äusseren Kraft unterliegt. Erst jetzt darf die äussere Kraft wieder wachsen.

Wenn wir wieder annehmen, dass die neu hinzugekommene Mehrkraft eine kurze Zeitspanne hindurch constant ist, so wird sich die Wirkung derselben auf bekannte Art wieder fortschreitend auf den ganzen Stab vertheilen. Durch Einwirkung dieser Mehrkraft werden nun wieder einige Theile gebunden, andere aber verschoben.

Es ist zu bemerken, dass die jetzt verschobenen Theile nicht identisch mit den früheren sind, weil in Folge der ersten Verschiebung der Stab länger und dünner geworden ist, weshalb dessen Wirkungsliniennetz mit dem früheren nicht zusammenfallen kann, wie es Fig. 24, Taf. III darstellt. Als Folge der veränderten Lage der Wirkungslinien werden bei der weiteren Deformation auch solche Moleküle gebunden, die früher verschoben wurden, und solche verschoben, die früher gebunden waren.

Wenn wir uns die wachsende Inanspruchnahme so weiter fortgesetzt denken, so ist ersichtlich, dass in Folge der sich fortwährend ändernden Lage der Wirkungslinien nahezu alle Moleküle verschoben werden, daher der Stab sich in seiner ganzen Länge nahezu gleichmässig deformirt.

Aus Vorhergehendem folgt, dass gleichmässige Deformation nur so lange entsteht, als der Reibungscoëfficient einen wachsenden Werth hat und die innere Reibung nicht grösser ist als die Cohäsion.

Wir wollen die der gleichmässigen Deformation entsprechende innere Reibungsarbeit in Zukunft **Zähigkeit** nennen.

Die Zähigkeit ist also jene im Material aufgehäufte Arbeitsfähigkeit, die von der relativen Lage der Moleküle abhängt. Wenn die Moleküle verschoben werden, wächst die Reibung und vermindert sich dementsprechend die aufgehäufte Arbeitsfähigkeit, d. h. das Material verliert an Zähigkeit und wird spröder.

Sobald die Moleküle, aus welch einem Grunde immer (bei Metallen z. B. durch Ausglühen und langsames Abkühlen), in ihre anfängliche Lage zurück gelangen, erhält die Reibung abermals ihren minimalen Werth und das Material wird nun wieder zähe. Die Verschiebung der Moleküle bewirkt nicht nur die Verminderung der Zähigkeit, sondern auch die Vergrösserung der Elasticitätsgrenze, weil in Folge der Verschiebung die innere Reibung grösser geworden ist und daher die Moleküle fester gebunden sind.

Eine der wichtigsten technischen Eigenschaften der Materialien ist die Zähigkeit, weshalb wir diese näher untersuchen wollen.

Die Zähigkeit ist, wie gesagt, ein Arbeitsvermögen der Materialien und besteht daher aus zwei Factoren: aus der Kraft und deren Weg, beziehungsweise der Dehnung.

Die Dehnung als der Weg der Kraftäusserung hängt theils vom Material, theils von der Form des Materials ab. Um den Einfluss der Form zu untersuchen, nehmen wir Versuchsstäbe von demselben kreisförmigen Querschnitte, jedoch folgender Längen h:

$$h = \tfrac{1}{2}\,\delta \operatorname{ctg}\beta$$
$$h = \delta \operatorname{ctg}\beta$$
$$h = 2\,\delta \operatorname{ctg}\beta$$
$$h = 2n\,\delta \operatorname{ctg}\beta$$
$$h = (2n+1)\,\delta \operatorname{ctg}\beta$$
$$h = (2n+\tfrac{1}{2})\,\delta \operatorname{ctg}\beta.$$

Um die Beanspruchung dieser Stäbe ersichtlich zu machen, zeichne man das Netz der Wirkungslinien und schraffire die einzelnen Theile entsprechend, wie dies Fig. 31—37, Taf. III darstellen.

Aus diesen Figuren ist ersichtlich, dass in jenen Fällen, wo die Länge h ein in ganzer Zahl genommenes Vielfaches von $\delta \operatorname{ctg}\beta$ ist (siehe Fig. 32, 33, 34, 36), sämmtliche verschiebbare Theile gleiche Länge haben und dass deren Anzahl mit der Stablänge proportional ist, weshalb auch die anfängliche Dehnung mit der Stablänge proportional sein muss. Wenn aber die Länge h ein in gemischter Zahl genommenes Vielfaches von $\delta \operatorname{ctg}\beta$ oder $h < \delta \operatorname{ctg}\beta$ ist, wie es Fig. 31, 35, 37 darstellen, so ergiebt sich in der Mitte des Stabes ein auf andere Art beanspruchter Theil, welcher die Dehnung beeinflusst. Diese Beeinflussung ist aber

mit der Länge nur dann proportional, wenn das Verhältniss $\frac{h}{\delta \operatorname{ctg} \beta}$ constant ist.

Wir haben schon bemerkt, dass bei solchen Stäben, deren Länge ein in ganzen Zahlen genommenes Vielfaches von $\delta \operatorname{ctg} \beta$ ist, die Dehnung nur am Anfange mit der Länge proportional ist, weil in Folge der Deformation der Durchmesser und die Länge sich in verschiedenem Maasse verändert, somit ihr Verhältniss der Formel

$$\frac{h}{\delta \operatorname{ctg} \beta} = n + \frac{1}{x}$$

entspricht.

Aus dem Gesagten folgt nun, dass die Dehnung mit der Länge im Allgemeinen nur dann proportional sein kann, wenn

$$\frac{h}{\delta \operatorname{ctg} \beta} = \frac{h_1}{\delta_1 \operatorname{ctg} \beta}$$

ist, d. h. wenn

$$\frac{h}{h_1} = \frac{\delta}{\delta_1},$$

welche Gleichung bei cylindrischen Stäben die Proportionalität bedeutet, weshalb die Dehnung mit der Länge nur bei proportionalen Körpern proportional ist.

Zu demselben Resultate gelangt man auch, wenn man Stäbe anderer Form — nicht cylindrische — in Betracht zieht. Ein solcher Stab ist in Fig. 30, Taf. III und zwar gleich mit den Wirkungs-Netzlinien in zwei Richtungen, nämlich der Breite und der Höhe entsprechend dargestellt. Aus dieser Figur ist ersichtlich, dass die Beanspruchung der Theile nicht nur von der Breite, sondern auch von der Höhe abhängt, weshalb proportionale Dehnung nur so entsteht, wenn nicht nur

$$\frac{h}{\delta \operatorname{ctg} \beta} = \frac{h_1}{\delta_1 \operatorname{ctg} \beta},$$

sondern auch

$$b \frac{h}{\operatorname{ctg} \beta} = \frac{h_1}{b_1 \operatorname{ctg} \beta}$$

ist, d. h. wenn

$$\frac{h}{h_1} = \frac{\delta}{\delta_1} = \frac{b}{b_1},$$

also wenn die Stäbe proportionale Körper sind. (Siehe das Kick'sche Gesetz.)

Obzwar dieser Satz im Allgemeinen giltig ist, so dürfen wir doch bei langen Stäben, ohne einen grösseren Fehler zu begehen, die Dehnung s mit der Länge h proportional annehmen ($s = \lambda h$), weil in diesem Falle der ungleichartig beanspruchte mittlere Theil im Verhältnisse zur ganzen Länge des Stabes gering ist, somit sein Einfluss nur so gering ist, dass wir für die Praxis genügende Genauigkeit erhalten, wenn wir den Einfluss des mittleren Theiles vernachlässigen.

Der zweite Factor der Zähigkeit ist die Kraft. Die äussere Kraft hat, vorausgesetzt, dass die Beschleunigung der Moleküle sehr gering ist, nur die innere Reibung zu überwinden.

Bezeichnen wir die auf die Querschnitts-Einheit entfallende jene innere Reibung, welche der Zugkraft entgegen wirkt, mit Nf_1, den derzeitigen Querschnitt mit Δ_1, so ist die gesammte innere Reibung durch $\Delta_1 Nf_1$ ausgedrückt, folglich ist die äussere Kraft:

$$P = \Delta_1 Nf_1.$$

Da wir voraussetzen, dass der Probestab aus unverdichtbarem Material bestehe, so bleibt sein Rauminhalt (K) auch während der Deformation beständig. Es wird also

$$K = \Delta h = \Delta_1 h_1$$

sein, wenn Δ und h die anfänglichen, Δ_1 und h_1 die veränderten Maasse sind. Hieraus folgt, dass

$$\Delta_1 = \Delta \frac{h}{h_1}$$

ist und weil

$$h_1 = s_1 + h,$$

so ist bei kurzen Stäben

$$\Delta_1 = \Delta \frac{h}{s_1 + h} = \Delta \frac{1}{1 + \frac{s_1}{h}}$$

und bei langen, weil

$$s_1 = \lambda_1 h$$

gesetzt werden kann,

$$\Delta_1 = \Delta \frac{h}{\lambda_1 h + h} = \Delta \frac{1}{1 + \lambda_1}.$$

Diese Werthe von Δ_1 in die Kraftformel gesetzt ergiebt, dass bei kurzen Stäben

$$P = \Delta \frac{1}{1 + \frac{s_1}{h}} Nf$$

und bei langen

$$P = \Delta \frac{1}{1 + \lambda_1} Nf_1 \text{ ist.}$$

Diese Formeln sagen uns, dass bei langen Stäben die Kraft mit dem anfänglichen Querschnitte annähernd proportional, folglich von der Länge unabhängig ist, bei kurzen Stäben aber vom Verhältnisse $\left(\frac{s_1}{h}\right)$ abhängt, folglich nur bei proportionalen Körpern mit dem Querschnitte proportional ist.

Nachdem wir nun die zwei Factoren der Zähigkeit kennen, können wir auch diese selbst in Augenschein nehmen.

Wir haben früher gefunden, dass bei kurzen Stäben und bei Stäben mit verschiedenem Querschnitte die Dehnung mit der Länge, die Kraft mit

dem Querschnitte nur dann proportional ist, wenn die Stäbe proportionale Körper sind. Es folgt hieraus, dass die Zähigkeit auch nur bei proportionaler Form mit dem Rauminhalte der Körper proportional sein kann.

Bei längeren cylindrischen Stäben mit kreisförmigem Querschnitte aber, da bei diesen, wie wir gesehen haben, für die Praxis mit genügender Genauigkeit die Dehnung mit der Länge, die Kraft mit dem Querschnitte proportional angenommen werden kann, ist die Zähigkeit mit dem Rauminhalte auch als proportional zu betrachten.

Als Ausgangspunkt unserer bisherigen Betrachtungen haben wir angenommen, dass die äussere Zugkraft nur die innere Reibung zu überwinden habe. Wenn wir nun den wechselnden Werth der äusseren Kraft und dessen Weg, d. h. die Dehnung des Stabes mittelst einem entsprechenden Dynamometer graphisch darstellen, so bedeutet die Kraftlinie auch das Gesetz der Veränderung der gesammten inneren Reibung und die Fläche des Schaubildes die gesammte innere Reibungsarbeit.

Indem bei Stäben von gleicher Dimension, laut nachstehender Formel

$$\frac{P}{P'} = \frac{\Delta Nf}{\Delta Nf'} = \frac{Nf}{Nf'}$$

die Reisskraft mit der auf die Flächeneinheit entfallenden inneren Reibung proportional ist, also nur von der Eigenschaft des Materials abhängt, so müssen bei ein und demselben Material gleich dimensionirte Stäbe gleiche gesammte Reibungsarbeit, folglich auch Schaubilder gleicher Form und Grösse ergeben.

Die Schaubilder sind in diesem Falle also congruent, wie es Fig. 7 und 8 auf Taf. IV ersichtlich machen. In diesen Figuren sind je drei Schaubilder übereinander gelegt, die sich zwar decken, doch nicht in demselben Punkte, sondern in b_1, b_2, b_3 endigen, was von den allfälligen Ungleichmässigkeiten und Fehlern des Materials herstammt.

Wir haben früher gesehen, dass die innere Reibung entweder kleiner oder grösser sein kann als die Wirkung der gebundenen Gase. Im ersteren Falle werden die Gase, sobald die äussere Kraft zu wirken aufhört, die Reibung überwinden, im letzteren Falle aber nicht mehr. Deshalb entspricht der erste Fall der elastischen und der zweite der bleibenden Formänderung.

Das Schaubild stellt uns die gesammte innere Reibungsarbeit dar. Es besteht also aus zwei Theilen, aus der elastischen und aus der Deformationsarbeit, deren letzteren Werth, bis zum maximalen Werthe der Reibungskraft gemessen, wir Zähigkeit nannten.

Diese verschiedenen Arbeitsmengen kann man mit Hilfe wiederholter Beanspruchungen, beziehungsweise mit deren Schaubildern von einander getrennt erhalten, wie wir dies in Fig. 9, Taf. IV sehen.

Nehmen wir an, dass die Kraftlinie der ersten Beanspruchung ($a\,c\,e_1$) sei, so ist die gesammte Arbeit $a\,e_1\,c_1$ und die maximale Kraft $c_1\,e_1$. Wenn

nun die Wirkung der äusseren Kraft aufhört und dann wiederholt in Thätigkeit kommt und wenn die maximale Kraft bei dieser zweiten Beanspruchung höher steigt, so wird die Kraftlinie, die nicht von c_1, sondern von a_1 anfängt, $a_1 e_1 e_2$ sein. Es ist also ersichtlich, dass von der ersten gesammten äusseren Arbeit ($a e_1 c_1$) der Theil $a_1 e_1 c_1$ zur Erzeugung der inneren Energie der gebundenen Gase verbraucht und nach der Entlastung solch ein Theil von der Reibungsarbeit überwunden wurde, weshalb dieser Theil ($a_1 e_1 c_1$) die elastische Arbeit und $a e_1 a_1$ die Deformationsarbeit bedeutet. Durch die erste Beanspruchung wurde also die im Material aufgehäufte Zähigkeit mit $a e_1 a_1$ vermindert. Bei einer dritten Beanspruchung ist die Kraftlinie $a_2 e_2 e_3$, folglich ist für die zweite Beanspruchung $a_2 e_2 c_2$ die elastische und $a_1 e_1 e_2 a_2$ die Deformationsarbeit und die Zähigkeit wurde durch die ersten zwei Beanspruchungen mit $a e_2 a_2$ vermindert.

In dem Schaubild Fig. 9, Taf. IV bedeuten die Linien $\overline{a e}$, $\overline{a_1 e_1}$, $\overline{a_2 e_2}$, $\overline{a_3 e_3}$ die Kraftlinien der elastischen Kraft. Da aber diese zufolge der Expansion und Compression der gebundenen Gase entstehen, so müssen sie gleichen Charakter haben, folglich zu einander parallel sein. Den Charakter dieser Linien kennen wir noch nicht,*) weshalb wir diese annähernd als Gerade betrachten. Aus dem genannten Schaubild ist ferner zu ersehen: 1. dass mit der wiederholten und immer höheren Beanspruchung nicht nur die Elasticitätsgrenze ($c_1 e_1$, $c_2 e_2$, $c_3 c_3$), sondern auch die Elasticität, d. h. die elastische Arbeit wächst; 2. die Zähigkeit sich vermindert und 3. dass der Nutzeffekt (η) mit dem Grade der Beanspruchung im Zusammenhange steht.

Als Nutzeffekt bezeichnet man im Allgemeinen das Verhältniss der Deformationsarbeit zu der gesammten äusseren Arbeit. Hiernach ist der Nutzeffekt bis zur Elasticitätsgrenze $\eta_0 = 0$; bei der Beanspruchung

$$\text{bis } c_1 c_1 \ldots . \eta_1 = \frac{a e_1 a_1}{a e_1 c_1},$$

bei einer erstmaligen Beanspruchung

$$\text{bis } c_2 c_2 \ldots . \eta_2 = \frac{a e_2 a_2}{a e_2 c_2},$$

hingegen bei einer erstmaligen Beanspruchung

$$\text{bis } c_3 c_3 \ldots . \eta_3 = \frac{a e_3 a_3}{a e_3 c_3},$$

und da $\eta_1 < \eta_2 < \eta_3$, so folgt hieraus, dass der Nutzeffekt um so grösser ist, je näher der Werth der äusseren Arbeit zu dem Gesammtwerthe der elastischen Arbeit und der Zähigkeit steht.

Wir wollen uns nun weitergehend mit der Untersuchung der inneren Reibung befassen.

Sämmtliche technische Eigenschaften der Materialien hängen von der auf die jeweilige Flächeneinheit bezogenen inneren Rei-

*) Im Band XXXXI (1897) der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure theilt Prof. C. Bach mit, dass die Formel der elastischen Dehnung: $\varepsilon = \alpha \sigma^m$ sei.

bung ab, welche wir kurzweg innere Reibung nannten und mit Nf bezeichnen. Da die innere Reibung Nf von so grosser Wichtigkeit ist, wird es angezeigt sein, deren Werth und dessen Veränderlichkeit näher zu betrachten.

Den Werth der inneren Reibung kann man aus dem Zugdiagramme mittelst der Formel der Zugkraft folgendermassen bestimmen:

$$P_1 = \Delta_1 N f_1,$$

also ist

$$N f_1 = \frac{P_1}{\Delta_1}.$$

Nehmen wir an, dass das Zugdiagramm jenes Schaubild sei, welches in Fig. 12, Taf. IV mit P bezeichnet ist. Theilen wir das Schaubild mittelst senkrechter Linien in beliebige Theile, so können wir für jeden Theilungspunkt den Werth von Nf bestimmen.

In a_1 ist nun

$$N f_1 = \frac{P_1}{\Delta_1} = \frac{a_1 e_1}{\Delta_1},$$

in a_2

$$N f_2 = \frac{P_2}{\Delta_2} = \frac{a_2 e_2}{\Delta_2} \text{ u. s. w.}$$

Es wäre nun noch Δ_1, Δ_2 u. s. w. zu bestimmen. Indem

$$K = \Delta h = \Delta_1 h_1 = \Delta_2 h_2$$

ist und

$$h_1 = h + s_1 = h + \overline{a_0 a_1}$$

$$h_2 = h + s_2 = h + \overline{a_0 a_2},$$

so ist

$$\Delta_1 = \frac{K}{h + \overline{a_0 a_1}}$$

$$\Delta_2 = \frac{K}{h + \overline{a_0 a_2}},$$

folglich

$$N f_1 = \frac{\overline{a_1 e_1}}{K}(h + \overline{a_0 a_1}) \text{ und sei dies} = \overline{a_1 m_1},$$

$$N f_2 = \frac{\overline{a_2 e_2}}{K}(h + \overline{a_0 a_2}) \quad „ \quad „ \quad „ \quad = \overline{a_2 m_2}$$

u. s. w.

Wenn wir diese Werthe von Nf_1 von den entsprechenden Theilungspunkten ausgehend als Kräfte $(a_1 m_1)$, $(a_2 m_2)$, $(a_3 m_3)$ u. s. w. senkrecht und linear auftragen und die Endpunkte m, m_1, m_2, m_3 ... mit einer Curve verbinden, so erhalten wir ein Schaubild der inneren Reibung (siehe Fig. 12, Linie Nf), jedoch nur in Abhängigkeit von der Verlängerung des Versuchsstabes ($s = \lambda h$) dargestellt. Wenn wir die Reibung anstatt in Abhängigkeit von der Verlängerung des Stabes ($s = \lambda h$) nur als eine Function der procentualen Dehnung (λ) darstellen, so erhalten wir ein Schau-

bild, in welchem nur absolute Eigenschaften des Materials aufeinander bezogen sind. Es ist zu diesem Behufe nöthig, aus den Werthen der procentualen Dehnung d. h. aus den entsprechenden λ_1, λ_2, λ_3 u. s. w. und den schon bekannten Nf_1, Nf_2, Nf_3 ein neues Schaubild zu construiren. Die Werthe von λ_1, λ_2, λ_3 berechnet man oder man benützt anstatt der Berechnung folgende planimetrische Darstellung.

Man berechnet zuerst die gesammte Dehnung ($a_0 a_6$ in Fig. 12) in Procenten nach Formel:

$$\lambda^0/_0 = 100 \frac{\overline{a_0 a_6}}{h}.$$

Nehmen wir an, dass diese den Werth von $\overline{\alpha_0 \alpha_6}$ in Fig. 13, Taf. IV hätte. Diese Länge ($\overline{\alpha_0 \alpha_6}$) theilt man in demselben Verhältnisse ein, wie in Fig. 12 die Länge $\overline{a_0 a_6}$. Dies kann man z. B. auf folgende elementare Art durchführen: man ziehe von α_0 und a_0 senkrechte Linien und projicire dann die Eintheilung von $\overline{a_0 a_6}$ auf die Linie $\overline{a_0 b_0}$ und von hier auf die Linie $\alpha_0 \overline{c_6}$, verbinde c_6 mit α_6 und ziehe von c_1, c_2, c_3 ... mit der Linie $c_6 \alpha_6$ Parallele, bis diese die Linie $\alpha_0 \alpha_6$ schneiden, wodurch man die gewünschte Eintheilung in α_0, α_1, α_2 ... erhält.

Ziehen wir nun in den Theilpunkten α_0, α_1, α_2, α_3 Fig. 13 Senkrechte und projiciren auf diese die entsprechenden Werthe der inneren Reibung von Fig. 12, d. h. die Werthe $\overline{a_1 m_1}$, $\overline{a_2 m_2}$ ... u. s. w., so erhalten wir in Fig. 13 die Punkte m_1, m_2, m_3; diese verbinden wir mit einer krummen Linie. Die so erhaltene Curve Nf Fig. 13 zeigt uns das Gesetz der Veränderung der inneren Reibung auf die procentuale Dehnung bezogen. Das durch diese Curve dargestellte Schaubild führt uns die absoluten Eigenschaften des Materials vor Augen, welche bei jeder Beanspruchungsart zur Geltung gelangen, weshalb man mit Hilfe dieses Schaubildes alle Arten der Beanspruchungen berechnen kann.

Um dieses wichtige Schaubild der inneren Reibung construiren zu können, benöthigt man jedoch ein solches Zugdiagramm, welches die Arbeit eines vollkommen freien Stückes darstellt, dessen Moleküle ausser der Zugkraft keiner anderen Beanspruchung unterworfen sind.

Bei den Zugversuchen muss man aber die Probestäbe an den Enden mit Ansätzen versehen, um sie in die Backen festklemmen zu können. Diese Ansätze beeinflussen die Arbeit des Stabes, weshalb solche Diagramme, in welchen auch die Dehnung der eingeklemmten Theile inbegriffen ist, als unrichtige und zur Berechnung der inneren Reibung als **unbrauchbare** zu bezeichnen sind.

Den Fehler der Backen und Ansätze kann man aber umgehen, da dessen Einfluss am Stabe laut dem Schema der Kraftvermittlung sich nur auf eine Länge von $\delta \operatorname{ctg} \beta$ bemerkbar macht. Wenn man also von den Ansätzen gegen die Mitte der Stablänge zu in einer Entfernung, die grösser als $\delta \operatorname{ctg} \beta$ ist, den Stab markirt, wie es Fig. 30, Taf. III darstellt, und wenn

man Sorge trägt, dass das Zugdiagramm nur jene Dehnung enthalte, welche die zwischen den zwei Marken *a* und *b* sich befindliche Stablänge erleidet, so erhält man ein richtiges, zur Berechnung der inneren Reibung brauchbares Schaubild. Wir können somit die Dehnung der Stabansätze aus dem Schaubilde eliminiren, indem wir an den markirten Stellen Klammern befestigen und diese mit dem Zeichenapparat der Zerreissmaschine so verbinden, dass die Verlängerung der Distanz zwischen den Klammern als Dehnung gezeichnet werde; oder dadurch, dass man von der gesammten Dehnung die Verlängerung der Entfernung der Marken von den Backen in Abzug bringt. Im letzteren Falle genügt es, die Entfernung einer Marke doppelt in Abrechnung zu bringen, da bei gleich grossen Ansätzen und bei gleichen Backen und gleicher Einspannung der Einfluss an beiden Seiten als gleichwerthig betrachtet werden kann.

Bei meinen Untersuchungen habe ich die letztgenannte Methode angewandt und habe das Entfernen der Marke von der fixen Backe (*B*) mit einem Vergrösserungsglase beobachtet, welches, wie Fig. 1, Taf. V zeigt, in dem mit *t* bezeichneten Rohre befestigt ist. Das Rohr besitzt anstatt Ocular ein Diaphragma und darunter zwei sich deckende Haarfäden. Mit diesem wird die Marke (*x*) so beobachtet, dass sie mit den Haarfäden in eine Ebene falle. Die Bewegung des Rohres geschieht mittelst eines Schlittens (*u*), auf welchem auch eine kleine Rolle (*k*) befestigt ist.

Der Zerreissapparat besteht lediglich aus einem Kolben, der mit der beweglichen Backe (*A*) in Verbindung steht, und aus einem Cylinder (*e*), welcher mit der Zugschraube verbunden ist. Der Raum *f* Fig. 2, ist mit Oel gefüllt. Die Kolbenstange (*g*) ist mit einer Bohrung versehen, durch welche die Pression, unter welcher sich das Oel befindet, auf einen Indicator (*h*), der auf der Kolbenstange befestigt ist, übertragen wird. Der Papiercylinder (*j*) des Indicators wird von der Schnur (*x*) bewegt. Wenn man diese Schnur direct mit der fixen Klammer (*l*) verbindet, so wird die Verdrehung des Papiercylinders mit dem Wege der Backe (*A*), also mit der gesammten Dehnung gleich sein. Wenn man aber diese Schnur um die Rolle (*k*) zur Klammer (*l*) führt, so wird der Papiercylinder zufolge der Rolle *k* um das Doppelte des Supportweges, beziehungsweise um das Doppelte der Verschiebung der Marke *x* von der Backe *B* zurückbleiben. Hiermit werden nun die Dehnungen der Theile ausserhalb der Marken von der Gesammtdehnung subtrahirt, wodurch das Schaubild nur die Dehnung jenes Stückes enthält, welches zwischen den Marken liegt.

13. Material IV. Gruppe.

Zähes, jedoch unbildsames Material mit variablem *f*,
wobei $N \cdot f_{max} > p_0$ ist.

So lange die Wirkung der äusseren Kraft kleiner ist als der Werth der inneren Reibung, kann keine bleibende Verschiebung entstehen; sobald

aber diese den Werth der inneren Reibung überschreitet, entsteht jene Deformation, welche sich auf den ganzen Stab gleichmässig erstreckt.

Diese gleichmässige Formänderung erreicht ihre Grenze, wenn die innere Reibung den Werth der Cohäsion erlangt, weil in diesem Falle die äussere Kraft die Cohäsion überwindet. Der Stab zerreisst nun, bevor die innere Reibung ihr Maximum erreicht hätte. Bei diesen Materialien ergiebt sich die Reisskraft, von der allgemeinen Formel abgeleitet, als folgender Ausdruck:

$$P_{\max} = \Delta_1 N f_1,$$

da aber

$$N f_1 = p_0$$

und

$$\Delta_1 = \frac{\Delta}{1 + \lambda}$$

ist, so folgt, dass

$$P_{\max} = \frac{\Delta}{1 + \lambda} \cdot p_0$$

und

$$\frac{P_{\max}}{\Delta} = \frac{p_0}{1 + \lambda}.$$

Diese letztere Formel sagt, dass die auf den anfänglichen Querschnitt bezogene Reisskraft, d. h. die Festigkeit, keine absolute Eigenschaft des Materials sei, sondern durch Verminderung der Dehnbarkeit (λ), also durch Beanspruchungen erhöht und durch Vergrösserung der Dehnbarkeit, also z. B. durch Ausglühen, vermindert werden kann.

14. Material V. Gruppe.

Zähes und bildsames Material mit variablem f,
wobei $N \cdot f_{\max} < p_0$ ist.

So lange die Wirkung der äusseren Kraft kleiner ist als der Werth der inneren Reibung, kann keine bleibende Verschiebung eintreten; sobald aber diese den Werth der inneren Reibung überschreitet, entsteht die gleichmässige Formänderung, die so lange andauert, bis Nf sein Maximum erreicht hat.

Von diesem Momente an haben diese Materialien denselben Charakter als jene der II. Gruppe, weil $Nf_{\max}$ seinen constanten Werth beibehält und $Nf_{\max} < p_0$ ist. Nachdem Nf sein Maximum erreicht hat, wird sich die Formänderung nicht mehr auf die ganze Stablänge erstrecken, sondern nur auf einen $\delta \operatorname{ctg} \beta$ langen Theil, d. h. der Stab contrahirt.

Bei diesen Materialien muss man daher zweierlei Formänderungen, also auch zweierlei Reibungsarbeit unterscheiden, nämlich jene, welche der gleichmässigen Deformation entspricht, die wir Zähigkeit nannten, und jene, welche der Contraction entspricht, die wir Bild-

samkeit nennen wollen. Betreffs der Zähigkeit ist zu bemerken, dass bei dieser die maximale Zugkraft folgenden Werth hat:

$$P_{\max} = \Delta_1 N f_{\max}$$

und da

$$\Delta_1 = \frac{\Delta}{1 + \lambda},$$

so folgt, dass

$$P_{\max} = \frac{\Delta}{1 + \lambda} N f_{\max}$$

und dass

$$\frac{P_{\max}}{\Delta} = \frac{N f_{\max}}{1 + \lambda}.$$

Hieraus folgt, dass auch bei diesen Materialien die Festigkeit keine absolute Eigenschaft ist, sondern durch Verminderung der Zähigkeit vergrössert, und durch Vermehrung der Zähigkeit vermindert werden kann.

Ueber die Bildsamkeit sei bemerkt, dass die äussere Kraft bei diesen Materialien sich so verhält, wie bei jenen der II. Gruppe, und dass die Bildsamkeit mit der Zähigkeit in gar keinem Zusammenhange steht, weil diese nicht von dem anfänglichen Werthe der inneren Reibung, sondern nur von dessen maximalem Werthe abhängt.

Das gesammte Zugdiagramm entspricht der Fig. 11, Taf. IV. Die Fläche bis zur maximalen Kraft $a\,b\,c$ stellt die Zähigkeit, und von da an, d. h. $b\,c\,n$, die Bildsamkeit dar. Die gesammte Dehnung oder Reissdehnung besteht also hier aus zwei Theilen und zwar aus der gleichmässigen Dehnung (ac), wo

$$ac = s_1 = \lambda h$$

ist, und aus der contractionellen Dehnung (cn), für welche wir die Formel

$$cn = s_2 = \varkappa \delta_1 \operatorname{ctg} \beta$$

erhalten haben.

Hiermit ist die Gesammtdehnung

$$an = ac + cn = s_1 + s_2 = s$$

also

$$s = \lambda h + \varkappa \delta_1 \operatorname{ctg} \beta$$

und bei Stäben mit kreisförmigem Querschnitte

$$s = \lambda h + \varkappa_1 \operatorname{ctg} \beta \sqrt{\Delta_1},$$

wie dies auch Bauschinger gefunden hat.

Aus der Formel für die contractionelle Dehnung

$$cn = s_2 = \varkappa \delta_1 \operatorname{ctg} \beta$$

kann man auch die Verhältnisszahl $\varkappa$, berechnen, welche den Grad der Bildsamkeit anzeigt. Es ist jedoch zu berücksichtigen, dass δ_1 jenen Durchmesser bedeutet, welchen der Stab am Ende der Zähigkeits-Defor-

mation hatte. Da bis zu dieser Grenze der Stab gleichmässige Dehnung erlitt, so ist

$$\frac{\delta^2\pi}{4}\cdot h = \frac{\delta_1{}^2\pi}{4}\cdot h_1 = \frac{\delta_1{}^2\pi}{4}\cdot h(1+\lambda)$$

und

$$\delta_1 = \frac{\delta}{\sqrt{1+\lambda}};$$

wenn man diesen Werth in s_2 einstellt, so ist

$$s_2 = \frac{\varkappa\,\delta\,\mathrm{ctg}\,\beta}{\sqrt{1+\lambda}}$$

und deshalb

$$\varkappa = \frac{s_2}{\delta}\,\frac{\sqrt{1+\lambda}}{\mathrm{ctg}\,\beta}.$$

15. Material VI. Gruppe.

Zähes Material mit variablem f, wobei $Nf_{\max} = p_0$ ist.

So lange die Wirkung der äusseren Kraft kleiner ist als der Werth der inneren Reibung, kann keine bleibende Verschiebung entstehen, sobald aber diese den Werth der inneren Reibung überschreitet, entsteht jene Formänderung, welche sich auf den ganzen Stab gleichmässig erstreckt. Diese gleichmässige Deformation, d. h. die Zähigkeit erreicht aber ihre Grenze, wenn die innere Reibung ihren maximalen Werth erhält.

In diesem Falle ist nun

$$P = \Delta_1 Nf_{\max}$$

und weil

$$Nf_{\max} = p_0$$

ist, so wird

$$P = \Delta_1 p_0$$

sein, woraus folgt, dass die äussere Kraft ebenso die Cohäsion als die maximale innere Reibung überwinden kann. Ueberwindet die äussere Kraft die Cohäsion, so zerreisst der Stab ohne zu contrahiren und man kann aus dessen Schaubilde den Werth von $Nf_{\max}$ berechnen; wenn aber die äussere Kraft die maximale innere Reibung überwindet, so können, der Gleichgewichtslage ($Nf_{\max} = p_0$) entsprechend, mehrere $\delta\,\mathrm{ctg}\,\beta$ lange Theile verschoben werden, und nachdem zur Reibungsarbeit dieser contrahirenden Theile ein Kraftaufwand nothwendig ist, so wird

$$P_{\max} \leqq \Delta_1 Nf_{\max}$$

werden, weshalb aus einem solchen Schaubilde (wie es Fig. 10, Taf. IV darstellt) der Werth des $Nf_{\max}$ nicht berechenbar ist. Aus diesem Schaubilde ist nämlich nicht ersichtlich, ob Nf seinen maximalen Werth nur im Punkte m oder schon früher, z. B. im Punkte b erreicht hat.

16. Versuchs-Resultate.

Um über die Richtigkeit der vorhergegangenen theoretischen Folgerungen Beweise zu erlangen, habe ich mit elementaren Wolle- und Baumwollehaaren, mit Geweben und Papieren, als auch mit verschiedenen Metallen Reissversuche durchgeführt und fand, dass alle diese Materialien diesen Folgerungen vollständig Genüge leisten. Namentlich fand ich, dass

1. gleich dimensionirte Versuchsstücke aus demselben Material gleiche, d. h. congruente Schaubilder ergeben, die auf einander gelegt sich vollständig decken,
2. dass die Summe der gleichmässigen Deformationsarbeit (Zähigkeit) bei einmaligen und bei wiederholten, bis zum Bruche fortgesetzten Zugbeanspruchungen vollständig gleich ist und schliesslich
3. dass durch Beanspruchungen die im Material aufgehäufte Zähigkeit sich vermindert, die Elasticitätsgrenze aber vergrössert wird.

Die letztgenannten Ergebnisse werden im praktischen Leben vielfach angewendet. So werden z. B. Transmissions-Seile und -Riemen vor dem Gebrauche stark gedehnt, dass diese später nicht deformiren. Stahlfedern für Dynamometer werden anstatt gehärtet auf Zug bedeutend stärker beansprucht, als dies später beim Gebrauch derselben geschieht, wodurch deren Elasticitätsgrenze erhöht wird u. s. w.

Hier wollen wir noch bemerken, dass bei Stahl der Werth des Nf_{max} von der (Lösungs-) Härtungskohle abhängt, weshalb weicher Stahl durch Zug nur bis zu seinem $N \cdot f_{max}$ gehärtet werden kann. Wenn man daher Stahl in höherem Grade härten will, so muss man ihn dem gewöhnlichen Härteprocesse unterwerfen, weil dadurch der Gehalt an Härtungskohle und damit der Werth des $N \cdot f_{max}$ vergrössert wird.

Durch Härten lässt sich also die Elasticitätsgrenze des Stahles mehr verändern als durch Deformiren.

Wir wollen jetzt auf die Versuchsresultate der Metalle übergehen.

In jenen Fällen, wo auf dem Zugdiagramme Contraction ersichtlich ist, gehört das Material unstreitig in die V. Gruppe und ist in diesem Falle die Formel der äusseren Kraft

$$P_1 = A_1 N f_1,$$

mit welcher Formel man nicht nur die Aenderungen der inneren Reibung, sondern auch deren Maximalwerth (Nf_{max}) bestimmen kann. Von den untersuchten Metallen gehören in diese Gruppe: Blei, Zinn, Aluminium, Kupfer und Schmiedeeisen, weil diese vor dem Bruche eine sich nach abwärts verlaufende Kraftlinie haben, wie dies aus ihren Diagrammen, welche

die mit (P) bezeichnete Linie in je Fig. 1 der Taf. VII—XIV darstellen, ersichtlich ist.

Die Zugdiagramme sind in derselben Grösse dargestellt, in welcher sie auf der Reissmaschine gewonnen wurden. Die Maasse des Stabes, d. h. der Durchmesser (d) und die Entfernung der Marken (h) sind neben den Diagrammen notirt. Aus diesen Zugdiagrammen construirt man das Schaubild der inneren Reibung nach in Punkt 12 mitgetheilten Verfahren, d. h. man theilt jedes Diagramm durch verticale Striche in mehrere Theile, berechnet dann in jedem Theilpunkte die Grösse der inneren Reibung auf Grund der Formel:

$$N \cdot f_x = \frac{P_x}{\Delta_x}$$

und trägt diese Werthe in der Kraftrichtung, jedoch im linearen Maassstabe (hier 1 kg = 1 mm) auf. Wenn man die so gewonnenen Punkte durch eine gleichmässig verlaufende Curve verbindet, so giebt diese uns das Bild der Veränderung der inneren Reibung bezogen auf die jeweilige Flächeneinheit und auf die Dehnung des Versuchsstabes. Diese Curven sind in Fig. 1, Taf. VII—XIV mit ($N \cdot f$) bezeichnet. Bei diesem Vorgehen ist zu bemerken, dass man die Berechnung nur bis zur Maximalkraft durchführen darf, da der weitere Theil des Diagramms der Bildsamkeit entspricht, bei welcher $N \cdot f_{max}$ constant ist.

Die in Fig. 1 mit $N \cdot f$ bezeichneten Schaubilder stellen nur eine relative Eigenschaft des Materials dar, da sie auch von der Länge des Stabes abhängen. Um aber jenes Schaubild zu erlangen, welches die absoluten Eigenschaften des Materials ergiebt, muss man die innere Reibung als Function der procentualen Dehnung auftragen. Dies erlangt man, wenn man die in Punkt 12 beschriebene und in Fig. 12—13 der Taf. IV dargestellte graphische Methode anwendet. Nach dieser Methode wurden die Schaubilder, welche auf Taf. VII—XIV in je Fig. 2 vorgeführt sind, construirt. Diese bezeichnen die absoluten Eigenschaften des Materials, wie wir dies schon Punkt 12 (Seite 23) erörtert haben, welche bei jederartigen Beanspruchung zur Geltung gelangen.

Der in Punkt 12 beschriebene Vorgang wurde bei allen untersuchten Metallen durchgeführt, mit Ausnahme des Aluminiums, weil bei dem Versuchsstabe dieses die Entfernung der Marken an dem Stabe gerade 100 mm betrugen, wodurch man schon in Fig. 1, Taf. IX das Schaubild der inneren Reibung, bezogen auf die procentuale Dehnung, erhalten hat. Aus den Schaubildern der inneren Reibung der genannten Metalle, d. h. des Bleies, Zinnes, Aluminiums, Kupfers und Schmiedeeisens (Fig. 2 der Taf. V—XIV), ist auch die maximale Reibung und die maximale gleichmässige Dehnung ersichtlich, und da diese Werthe bei Berechnung der maximalen äusseren Kraft allerartigen Beanspruchungen zur Geltung kommen, so haben wir diese in folgender Tabelle zusammengestellt:

Materialien V. Gruppe		$N \cdot f_{max}$	$\lambda\%$
Blei	*Pb*	2·05	27
Zinn	*Sn*	2·17	17·4
Aluminium	*Al*	10·58	20
12, 15 und 18 mm Kupferblech . . .	*Cu*	26·3	25
I^a Kesselblech	*C* = 0·11 *Si* = 0·066 *Mn* = 0·54 *P* = 0·019	36	17
II^a Kesselblech	*C* = 0·14 *Si* = 0·033 *Mn* = 0·58 *P* = 0·044	39·7	17·5

Ausser den genannten Metallen wurden auch drei Messingsorten untersucht, deren Zugdiagramme in Fig. 1 der Taf. XV—XVII ersichtlich sind. An diesen Diagrammen ist die Contraction nicht wahrnehmbar; diese gehören daher entweder in die Gruppe IV oder VI. Da aber auch an den Probestäben keine Contraction ersichtlich ist, gehören sie anscheinend in die Gruppe IV. Die genaue Einreihung derselben wird erst auf Grund anderer Beanspruchungen möglich sein.

Weiterhin wurde Deltametall untersucht, an dessen Zugdiagramm auch keine Contraction ersichtlich ist. Die Kraftlinie desselben besteht nur aus einer ansteigenden Curve, wie dies aus Fig. 1 der Taf. XVIII zu ersehen ist, trotzdem dass der Stab contrahirt hat; dieses Metall gehört daher in die Gruppe VI. Wir haben schon erwähnt, dass man bei dieser Gruppe den maximalen Werth der inneren Reibung, zu welchem man das ganze Zugdiagramm benützt hat (Fig. 2, Taf. XVIII), nur mit dem Vorbehalten in Betracht nehmen kann, dass davon nur ein Bruchtheil giltig ist. Diesen Bruchtheil werden wir später mit Hilfe anderer Beanspruchungen bestimmen.

Schliesslich wurde auch noch gegossenes Zink und graues Roheisen untersucht. Die Zugdiagramme dieser bestehen aus einer nahezu senkrechten Linie und sind deshalb beide als spröde Materialien zu bezeichnen. Es wäre aber noch fraglich, ob wir es hier mit Materialien der I. Gruppe oder mit spröde gewordenen Materialien der IV. Gruppe zu thun haben. Da diese Materialien durch Ausglühen ihre Sprödigkeit nicht verlieren, wären dieselben in die I. Gruppe, bei welcher (f) constant und $N \cdot f > p_0$ ist, einzutheilen.

Wenn wir die Bruchfläche der zwei Materialien oder das mikrophotographische Bild des grauen Roheisens betrachten, sehen wir, dass dessen

Gefüge krystallinisch ist, weshalb hier ausser der molekularen Cohäsion und Reibung auch die Gruppen-Reibung in Betracht zu ziehen ist.

Beim Zug ist die Gruppen-Cohäsion zur Geltung gekommen, wie dies die Krystalle der Bruchfläche beweisen. Zufolge der Gruppen-Cohäsion und -Reibung würden diese Materialien in die Gruppe I gehören, nachdem es aber möglich ist, dass die molekulare Reibung und Cohäsion bei anderen Beanspruchungen zur Geltung kommen, so kann man sie noch nicht endgiltig einreihen. Wenn der letztere Fall einträte, dann würden diese Materialien in die Gruppe mit combinirtem Reibungscoëfficient einzureihen sein. Einstweilen aber reihen wir sie in die Gruppe I ein.

B. Beanspruchung auf Druck.

17. Allgemeiner Theil.

Um die Beanspruchung durch Druck anschaulich zu machen, nehmen wir an, 1. dass die Druckkräfte auf einen Cylinder mit kreisförmigem Querschnitt gleichmässig vertheilt wirken, 2. dass die äussere Kraft nur langsam zunimmt, also in kleinen Intervallen constant ist, und schliesslich 3. dass das Material unverdichtbar sei.

Da die Uebertragung der äusseren Kraft in der Richtung des Wirkungswinkels geschieht, so müssen wir vor allem das Molekularnetz des Stabes feststellen.

Bei Zug bildete die Kraftübertragungsrichtung mit der Richtung der Zugkraft den Winkel β; nachdem aber die Zugrichtung zugleich die Richtung der Maassvergrösserung ist, so kann man als allgemeine Regel aussprechen, dass der Wirkungswinkel (β) mit der Richtung der Maassvergrösserung zu bilden sei, mit anderen Worten, der eine Schenkel des $\angle\,\beta$ fällt in die Richtung der Maassvergrösserung. Diese Regel müssen wir bei jeder Beanspruchung befolgen.

Bei Druckbeanspruchung entsteht in der Richtung der äusseren Kraft die Verminderung und in der hierzu senkrechten Richtung die Vergrösserung der Maasse, deshalb muss man hier den Wirkungswinkel β mit der zur äusseren Kraft senkrecht stehenden Richtung bilden.

Nehmen wir nun an, dass das Versuchsstück in Fig. 39, Taf. VI dargestellt sei und dass die gleichmässig vertheilten Druckkräfte auf die Moleküle der Endflächen $a\,c$ und $a'\,c'$ wirken, so muss der Wirkungswinkel β mit der zur äusseren Kraft senkrecht stehenden Linie $a\,c$ und $a'\,c'$ gebildet werden — in der Zeichnung mit der Wagerechten — und muss das Molekularnetz mit Benützung dieser Richtung construirt werden.

Da die Moleküle die Wirkung der äusseren Kraft nur in der Richtung der Wirkungswinkel vermitteln, so sind die äusseren Kräfte in solche Komponenten zu zerlegen, deren Richtung mit jener des Schenkels der Wirkungswinkel übereinstimmt. Um die Beanspruchung bildlich darzustellen, muss man die Wirkung einer jeden Komponente auf die in ihrer

Richtung liegenden Moleküle ebenso mit Kraftlinien bezeichnen, wie bei der Beanspruchung auf Zug. Man trage deshalb jene Geraden, welche die Kräfte darstellen, von a bis e, von c bis d, von a' bis e', von c' bis d' und dann von den Molekülen, die zwischen a und c, ferner zwischen a' und c' liegen, in den Richtungen beider Wirkungswinkel auf. Aus der so construirten Figur ist zu ersehen, dass auf die Moleküle $a\,b\,c$ und $a'\,b'\,c'$ die Kräfte in zwei Richtungen wirken, deren Resultante in die Richtung der äusseren Kraft fällt, weshalb diese als an die Angriffspunkte der äusseren Kraft befestigt gedacht werden können. Weiter sehen wir, dass auf die Moleküle der Theile $a\,b\,d$, $c\,b\,e$ und $a'\,b'\,d'$, $c'\,b'\,e'$ die Komponenten nur in einer Richtung wirken. Diese Moleküle sind daher bestrebt, sich von der Mittelachse zu entfernen und zugleich der Richtung der äusseren Kraft zu folgen.

Bei der Zugbeanspruchung erhielten wir jenen Theil der inneren Reibung, welcher von der Zugkraft überwunden wird. Nachdem die Zugkraft dort die Maassvergrösserung hervorruft, so kann man sagen, dass die bekannte innere Reibung der Maassvergrösserung widersteht. Diese Annahme müssen wir auch weiterhin festhalten.

Da bei der Druckbeanspruchung nur jene Theile der Komponenten die Maassvergrösserung hervorrufen, welche die Moleküle von der Mittelachse zu entfernen trachten, so folgt hieraus, dass die innere Reibung nur diesen Theilen widersteht. Diese Krafttheile, welche die Moleküle von der Mittelachse zu entfernen suchen, wollen wir die Schubwirkung der Druckkräfte nennen. So lange die innere Reibung grösser ist als die Schubwirkung der Druckkräfte, werden sich die Moleküle der Theile $a\,b\,d$, $c\,b\,e$, $a'\,b'\,d'$ und $c'\,b'\,e'$ nicht bewegen, da aber zufolge der Zunahme des normalen Druckes (N) die innere Reibung dieser Theile zunimmt, so werden diese fester gehalten als jene, auf welche die äussere Kraft noch nicht einwirkt, weshalb auch diese, ganz so wie bei der Zugbeanspruchung, als die ergänzenden Theile des Werkzeuges zu betrachten sind.

In der folgenden Beanspruchungsperiode sind nun die Moleküle der Grenzflächen $d\,b\,e$ und $d'\,b'\,e'$ als Angriffspunkte der äusseren Kraft zu betrachten, weshalb die Wirkung der äusseren Kraft von diesen Punkten aus ebenso aufzutragen ist, wie früher von den Punkten der Fläche $a\,c$ aus.

Aus der so ergänzten Figur ist ersichtlich, dass auf die Theile $b\,d\,g\,e$ und $b'\,d'\,g'\,e'$ zwei Komponenten wirken, deren Resultante mit der Richtung der äusseren Kraft übereinstimmt. Diese Theile folgen also der Bewegung des Werkzeuges, während auf die Theile $d\,g\,d'$, $e\,g\,e'$ nur eine Komponente wirken würde, so wie früher auf $a\,b\,d$, wenn der Versuchskörper länger wäre. In Fig. 39, Taf. VI ist der Versuchskörper so gewählt, dass in $d\,g\,d'$, $e\,g\,e'$ die Actions- und Reactionswirkungen zusammenfallen, deren Resultante ebenso die Schubwirkung hervorruft, wie vorher die schiefen Komponenten in $a\,b\,d$ u. s. w. Die Theile $d\,g\,d'$, $e\,g\,e'$ können sich erst dann bewegen, wenn die innere Reibung grösser geworden ist als die

Schubwirkung der äusseren Kraft. Da aber die innere Reibung in Folge der erhöhten normalen Kraft (N) in diesen Theilen ebenfalls grösser geworden ist, so sind diese ebenso gebunden, wie die Theile $a\,b\,d$ u. s. w.

Durch diese Wirkung der äusseren Kraft — wie es Fig. 39 zeigt — sind sämmtliche Theile des Stabes gleichförmig festgehalten, daher die äussere Kraft in der nächsten Periode einen erhöhten Werth annehmen kann.

Die Wirkung der äusseren Kraftzunahme müssen wir von den Molekülen der Grenzflächen $a\,c$ und $a'\,c'$ ausgehend ebenso auftragen, wie die der anfänglichen Kraft und wenn die innere Reibung noch immer grösser ist als die Schubwirkung der vergrösserten äusseren Kraft, so entsteht keine Verschiebung, sondern die Kraft pflanzt sich in der bekannten Weise über den ganzen Stab fort. Nachdem dies geschehen, kann die äussere Kraft neuerdings zunehmen.

Die Wirkung der äusseren Kraft haben wir bisher durch Aufzeichnung der Kraftlinie versinnlicht. Diese Bezeichnung ist aber sehr mühsam, weshalb wir diese nur in komplizirteren Fällen anwenden werden. In einfachen Fällen hingegen werden wir ebenso verfahren wie bei der Besprechung der Zugbeanspruchung, d. h. wir zeichnen den Wirkungswinkel β aus den Endpunkten $a\,c$, $a'\,c'$ (Fig. 40, Taf. VI) und setzen dies aus den Punkten $d\,e$, $d'\,e'$ fort; dann schraffiren wir die festgehaltenen Theile senkrecht, die übrigen wagerecht, wie es Fig. 41 darstellt.

Als Bedingung der Molekularverschiebung stellten wir auf, dass die Schubwirkung der äusseren Kraft grösser sein muss als die innere Reibung.

Nachdem wir bis jetzt nur den Werth der inneren Reibung kennen, so ist es nothwendig, dass wir im Nachfolgenden die Schubwirkung der Druckkraft feststellen, beziehungsweise bestimmen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir die Fig. 42, Taf. VI, bei welcher die Schenkel der Wirkungswinkel, die aus den Endpunkten $a\,c$ und $a'\,c'$ gezogen sind, zusammenfallen und nehmen wir der Einfachheit halber anstatt der gleichmässig vertheilten Kräfte die in der Mitte wirkende Resultante (q) in Betracht. Diese Druckkraft (q) als auch die Reaktionskraft derselben kann man in der Richtung der Kraftvermittlung in je zwei Komponenten zerlegen, nämlich in k_1 und k_2.

Diese Komponenten wirken auf die Seitenflächen und verursachen hier die Schubwirkung p_n, deren Werth nach Fig. 42 folgender ist:

$$p_n = k_1 \cos\beta + k_2 \cos\beta$$

und weil $k_1 = k_2$, so ist

$$p_n = 2\,k_1 \cos\beta.$$

Der Werth von k_1 ist nach derselben Figur:

$$q = k_1 \cos\gamma + k_2 \cos\gamma = 2\,k_1 \cos\gamma$$

also

$$k_1 = \frac{q}{2\cos\gamma}.$$

Da aber

$$2\gamma + 2\beta = 180^0,$$

das heisst

$$\gamma + \beta = 90^0$$

und

$$\cos\gamma = \sin\beta,$$

so ist

$$k_1 = \frac{q}{2\sin\beta}.$$

Dies in die Formel von p_n eingesetzt, wird

$$p_n = \frac{2\cos\beta \cdot q}{2\sin\beta}$$

oder

$$p_n = q \cdot \operatorname{ctg}\beta.$$

Der abgeleitete Werth der Schubwirkung ist nicht nur in dem angenommenen speciellen Falle, sondern auch ganz allgemein giltig, weil die in Fig. 41 senkrecht schraffirten Theile in Folge der continuirlichen Zunahme der äusseren Kraft gleichförmig festgehalten sind, folglich die wagrecht schraffirten Theile ebenso zwischen gleichartig gebundene Theile eingekeilt sind, wie in Fig. 42. Nun können wir schon die oben aufgestellte Behauptung, dass eine Verschiebung so lange nicht entstehen kann, bis die innere Reibung Nf nicht grösser ist als die Schubwirkung der Druckkraft, mit folgender Formel darstellen:

$$Nf > q\operatorname{ctg}\beta$$

und im Gleichgewichte:

$$Nf = q\operatorname{ctg}\beta.$$

Aus dieser letzteren Formel kann man auch die Elasticitätsgrenze bestimmen, indem man als Maass derselben jene maximale äussere Kraft annimmt, welche noch keine Verschiebung hervorruft. Die Elasticitätsgrenze ist also gleich mit jener äusseren Kraft, welche mit der inneren Reibung im Gleichgewicht steht; daher

$$q = \frac{Nf}{\operatorname{ctg}\beta} = Nf \cdot \operatorname{tg}\beta.$$

Wenn wir diesen Ausdruck mit dem entsprechenden bei Zugbeanspruchung erhaltenen vergleichen, so finden wir, dass die Elasticitätsgrenze beim Druck grösser ist als beim Zuge, wo diese den Werth $p = Nf$ hat.

Aus der Gleichung der Gleichgewichtslage lässt sich auch die gesammte Druckkraft bestimmen, denn diese ist das Product aus der auf die Flächeneinheit bezogenen äusseren Kraft (q) mit der Grösse der Fläche (A), also

$$Q = Aq = A \cdot Nf \cdot \operatorname{tg}\beta.$$

Nach diesen allgemeinen Erörterungen wollen wir auch hier wieder auf jene speciellen Fälle übergehen, die sich aus den Abweichungen in den Eigenschaften der Materialien ergeben, und die uns interessirenden Verhältnisse bei jeder einzelnen Materialgruppe eingehend untersuchen.

18. Material I. Gruppe.

Sprödes Material mit constantem f, wobei $Nf > p_0$ ist.

So lange die Schubwirkung der äusseren Kraft

$$p_n = q \cdot \operatorname{ctg} \beta$$

den Werth der inneren Reibung nicht erreicht hat, erstreckt sich die Wirkung der äusseren Kraft auf den ganzen Stab, ohne jedoch eine bleibende Verschiebung der Moleküle hervorzubringen. Sobald aber die Schubwirkung den Werth der inneren Reibung überschritten hat, wenn also $p_n > Nf$ wird, dann werden sich die wagerecht schraffirten Theile $a\,b\,d$, $c\,b\,e$, $a'\,b'\,d'$, $c'\,b'\,e'$ (Fig. 41, Taf. VI) in der Richtung der Komponente bewegen.

Da sich aber die Theile $a\,b\,c$ und $a'\,b'\,c'$ nur in der Richtung der Druckkraft bewegen, die Theile $a\,b\,d$ und $c\,b\,e$ aber das Bestreben haben, sich von der Mittelachse zu entfernen, so entsteht in den Flächen $a\,b$ und $b\,c$ eine Zugbeanspruchung, welche, wie bekannt, nur die Cohäsion vermitteln könnte. Nachdem aber bei dieser Gruppe die Cohäsion kleiner ist als die innere Reibung, d. h.

$$p_0 < Nf \quad \text{und} \quad Nf < p_n,$$

so ist

$$p_0 < p_n \quad \text{oder} \quad p_0 < q \operatorname{ctg} \beta,$$

so überwindet die Schubwirkung der Druckkraft die Cohäsion und der Stab erleidet Bruch.

Bei diesen Materialien kann man also durch gewöhnlichen Druck keine Formänderung hervorrufen, weshalb man sie spröde nennt.

Die Bedingung der Sprödigkeit haben wir mit der Formel

$$p_0 < Nf \quad \text{oder} \quad p_0 < p_n$$

schon festgestellt.

Nach dieser Formel entsteht der Bruch bei spröden Materialien deshalb, weil die durch die äussere Kraft hervorgerufene Schubwirkung grösser ist als die Cohäsion. Als Folge hiervon können wir sagen, dass der Bruch vermieden wird, wenn wir ausser der Druckkraft noch eine mit der Cohäsion in gleichem Sinne, also der Schubwirkung entgegen wirkende äussere Kraft (p_e) anwenden, die kleiner sei als die Schubwirkung, deren Summe mit der Cohäsion (p_0) jedoch grösser sei als die Schubwirkung der Druckkraft (p_n):

$$p_e < p_n$$

$$p_e + p_0 > p_n.$$

Diesen Bedingungen entsprach Kick, als er sprödes Material in einem starken Eisenrohr (nach Fig. 3, Taf. I) zwischen Alaun, und ein ander Mal (nach Fig. 5, Taf. I) in einem mit starken Kautschukplatten abgeschlossenen Glasrohre in Flüssigkeit einbettete.

In beiden Fällen erhielten die Seitenflächen Gegendruck (p_e), welcher der Schubwirkung (p_n) entgegenwirkte. Dieser Gegendruck war jedoch

kleiner als die Schubwirkung, weil das Eisenrohr, beziehungsweise die Kautschukplatten sich deformirten und hierdurch die Maassvergrösserung in der Richtung der Schubwirkung gestatteten.

Das Druckdiagramm der spröden Materialien ist eine senkrechte oder schiefe Linie, je nachdem das Material elastisch oder unelastisch ist.

Bei den bisherigen Abhandlungen haben wir die Figur Taf. VI vor Augen gehalten und gefunden, dass die gesammte Druckkraft der nachstehenden Formel entspricht:

$$Q = \Delta \cdot q = \Delta \cdot Nf \cdot \operatorname{tg} \beta$$

und dass bei dieser der Bruch in der Richtung $a\,e$ oder $c\,d$ entsteht. Wenn wir nun die Fig. 43, 44 und 45 in Betracht nehmen, so erkennen wir, dass bei diesen jene Theile, welche in Fig. 41 mit $a\,b\,d$ und $c\,b\,e$ bezeichnet sind, vollkommen gleiche Lage haben, weshalb auch die Schubwirkung der äusseren Kraft unter gleichen Verhältnissen wirkt; nun wird die Bruchrichtung und die nöthige gesammte Druckkraft mit der des früheren Falles identisch sein.

Da bei den betrachteten Körpern die Höhe (δ) grösser oder wenigstens gleich war mit der Höhe eines gleichbeanspruchten Theiles ($a\,d = D \cdot \operatorname{tg} \beta$ in Fig. 41), so können wir den Schluss ziehen, dass unsere Folgerungen so lange giltig bleiben, als

$$\delta \geqq D \cdot \operatorname{tg} \beta \text{ ist.}$$

Sobald dieses Verhältniss geändert wird, d. h. wenn

$$\delta < D \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

ändert sich die Beanspruchung der Moleküle, wie dies aus Fig. 46 und 47 ersichtlich ist, und deshalb ändert sich auch der Kraftbedarf. Die Aenderung des Kraftbedarfes wollen wir jetzt nicht weiter verfolgen; hiermit befassen wir uns erst im nächsten Abschnitte und begnügen uns hier mit der Bemerkung, dass die dortigen Folgerungen auch hier vollkommen Geltung besitzen.

19. Material II. Gruppe.

Bildsames Material mit constantem f, wobei $Nf < p_0$ ist.

So lange die Schubwirkung der äusseren Kraft ($q \cdot \operatorname{ctg} \beta$) den Werth der inneren Reibung (Nf) nicht erreicht, erstreckt sich die Wirkung der äusseren Kraft in bekannter Weise über den ganzen Stab, ohne eine bleibende Verschiebung hervorzubringen. Wenn aber dieser Werth überschritten wird, also wenn

$$q \cdot \operatorname{ctg} \beta > Nf,$$

wird der Ueberschuss an Kraft, von den Molekülen der Grenzflächen $a\,c$ und $a'\,c'$ ausgehend, seine Wirkung einstweilen bis zu den Punkten d, e und d', e' (Fig. 41, Taf. VI) zur Geltung bringen. Demzufolge werden die Theile $a\,b\,c$ und $a'\,b'\,c'$ der Richtung des Werkzeuges folgen, die Theile

$a\,b\,d$, $c\,b\,e$ und $a'\,b'\,d'$, $c'\,b'\,e'$ aber werden verschoben. Diese Verschiebung kann ohne Bruch geschehen, da nach unserer Annahme die Cohäsion bedeutend, die Schubwirkung aber nur um ein Geringes grösser ist als die innere Reibung.

Aus dem bisherigen folgt nun, dass die Wirkung der Mehrkraft sich nur auf die Theile $a\,d\,b\,e\,c$ und $a'\,d'\,b'\,e'\,c'$ erstreckt und nachdem die Theile $a\,b\,d$, $c\,b\,e$ und $a'\,b'\,d'$, $c'\,b'\,e'$ den Kraftüberschuss zur Beschleunigung ihrer Moleküle benützen, so kann die Wirkung der äusseren Kräfte auf die weiteren Theile des Körpers so lange nicht übertragen werden, bis diese Theile nicht bedeutende Querschnittsvergrösserung erhalten haben.

Man kann also sagen, dass beim Zusammendrücken von längeren Cylindern die unmittelbar an den Druckflächen liegenden Theile derselben in einer Länge von $a\,d = a'\,d' = D \cdot \mathrm{tg}\,\beta$ stärker deformiren, dass also der Stab an seinen Enden gestaucht wird.

Aus der Fig. 41 ist auch die Ursache zu erklären, warum sich längere Säulen unter Druck leicht ausbiegen. Es ist nämlich dort ersichtlich, dass die gebundenen Theile, sich mit den Spitzen berührend, übereinander reihen.

Wenn nun vorausgesetzt wird, dass die Druckflächen nicht genau parallel sind, oder dass die Flächen $a\,c$ und $a'\,c'$ nicht genau senkrecht zur Achse sind, oder endlich wenn sich im Innern des Materials Blasen, im Allgemeinen Ungleichheiten befinden, so geht die Resultante der Aktions- und die Resultante der Reaktionskraft nicht durch die Spitzen der gebundenen Theile. Es tritt ein Drehungsmoment auf, welcher eine Bewegung dieser gebundenen Theile um die Spitzen, also eine Biegung hervorruft.

Die Formänderung der Endtheile entsteht nicht nur bei relativ hohen Säulen (wie z. B. die in Fig. 41 ist), sondern in allen Fällen, wo die Endtheile in der Länge von $D \cdot \mathrm{tg}\,\beta$ frei sind, also überall, wo die Höhe (δ) des Stabes

$$\delta \geqq 2 \cdot D \cdot \mathrm{tg}\,\beta \text{ ist.}$$

Unter solchen Verhältnissen befinden sich z. B. die in Fig. 43 und 44 dargestellten Säulen.

Sobald aber die Höhe des Cylinders kleiner ist als oben erwähntes Maass, wenn also

$$\delta < 2 \cdot D \cdot \mathrm{tg}\,\beta$$

ist, so durchdringen sich die stauchenden Endtheile und der Stab deformirt sich in der ganzen Länge und zwar um so gleichmässiger, je vollständiger diese Durchdringung ist. Vollständig wird die Durchdringung, wenn

$$\delta = D \cdot \mathrm{tg}\,\beta,$$

wie es aus den Fig. 45 und 57 ersichtlich ist, weshalb in diesen Fällen eine intensive Deformation (nach der in Fig. 57 mit punktirten Linien gekennzeichneten Weise) vor sich geht.

Bezüglich der Vertheilung der äusseren Kraft ist zu bemerken, dass dies bis zu jener Grenze, wo

$$\delta = D \cdot \operatorname{tg} \beta$$

ist, auf der Druckfläche ebenso gleichmässig geschieht, wie bei den längeren Cylindern und zwar aus dem Grunde, weil die mit dem Werkzeuge sich berührenden Theile $a\,b\,c$ und $a'\,b'\,c'$ hier ebenso festgehalten sind wie dort.

Wenn aber

$$\delta < D \cdot \operatorname{tg} \beta$$

ist, so ändert sich die Kraftvertheilung.

Nehmen wir an, dass die Höhe sich zwischen

$$\delta = D \cdot \operatorname{tg} \beta$$

und

$$\delta = 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg} \beta$$

ändert.

Construiren*) wir für diese Werthe das netzartige Bild der Kraftübertragung, so werden wir sehen, dass mit der Verminderung der Höhe von jenen Theilen des Stabes, welche unter dem Werkzeuge sind, immer mehr und mehr Moleküle an der Deformation theilnehmen und zwar so, dass in dem Falle, wenn $\delta = 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg} \beta$ ist (wie es Fig. 46 darstellt), schon sämmtliche Moleküle bei der Deformation betheiligt sind. Aus den netzartigen Bildern der Kraftübertragung würde auch ersichtlich sein, dass im Innern der Körper sich solche Molekülgruppen bilden, auf welche **vier** sich im Gleichgewichte befindliche Komponenten wirken und daher diese Gruppen unbeweglich sind. Solche Gruppen werden wir zur leichteren Uebersicht doppelt schraffiren.

In dem Falle, wenn

$$\delta = 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg} \beta$$

ist, wird die unbewegliche Gruppe (Fig. 46) schon so gross, dass sie die Druckflächen berührt und somit die weitere Annäherung des Werkzeuges verhindert.

Wir sehen also, dass, so lange

$$\delta \geq 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg} \beta$$

ist, dem Eindringen des Werkzeuges keine Körpertheile widerstehen, weshalb man die Deformation bis zu dieser Grenze mit gleichmässig vertheilten äusseren Kräften vollführen kann.

Sobald aber

$$\delta < D \cdot \operatorname{tg} \beta$$

ist, wächst die Anzahl der unbeweglichen Moleküle, wie aus den Fig. 47, 48, 51 ersichtlich ist. Es werden dem Eindringen des Werkzeuges immer mehr und mehr Moleküle im Wege stehen, und die Druckflächen können sich so lange nicht einander nähern, bis die im Wege stehenden unbeweglichen Moleküle von anderweitigen äusseren Kräften nicht entfernt werden.

*) Die Construction dieser Bilder empfehlen wir den geehrten Fachgenossen.

Die bisherigen Resultate zusammenfassend ergiebt sich, dass man mit gleichmässig vertheilten Druckkräften nur dann eine regelmässige, auf die ganze Höhe sich erstreckende Deformation erzielen kann, wenn die Höhe des Stabes dem Verhältnisse zwischen

$$\delta < 2 \cdot D \cdot \operatorname{tg} \beta$$

und

$$\delta > 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg} \beta$$

entspricht; ferner dass zwischen dem Werkzeuge und dem beanspruchten Gegenstande Reibung nur dann auftritt, wenn

$$\delta < D \cdot \operatorname{tg} \beta$$

ist und endlich, dass in dem Falle, wenn

$$\delta < 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg} \beta$$

ist, die rückwirkende Festigkeit grösser wird und die Druckkraft sich auf der Druckfläche ungleich vertheilt.

Diese allgemeine Regel kennend, können wir die Druckkraft jederzeit berechnen.

a) In jenen Fällen, wo

$$\delta > 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg} \beta$$

ist, wird die Bedingung des Gleichgewichtes

$$q \cdot \operatorname{ctg} \beta = Nf;$$

daher der Druck auf die Flächeneinheit, d. h. die rückwirkende Festigkeit

$$q = \frac{Nf}{\operatorname{ctg} \beta} = Nf \cdot \operatorname{tg} \beta$$

und wenn wir die derzeitige Druckfläche mit Δ_x bezeichnen, so ist die gesammte Druckkraft

$$Q_x = \Delta_x \cdot Nf \cdot \operatorname{tg} \beta = \Delta_x \cdot q.$$

Aus dieser Formel lässt sich der genaue Werth der jeweiligen Druckkraft nur dann berechnen, wenn man die Aenderung von Δ_x genau kennt.

In jenen Fällen, wo

$$\delta < 2 \cdot D \cdot \operatorname{tg} \beta$$

ist, und besonders wo

$$\delta < 1{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg} \beta$$

ist, darf man die Deformirung, ohne einen grösseren Fehler zu begehen, als ziemlich gleichförmig betrachten, weshalb man die Aenderung des Querschnittes in diesen Fällen aus der Beständigkeit des Volumens (K) berechnen kann.

Das Volumen ist

$$K = \Delta_0 \delta_0 = \Delta_1 \delta_1 = \Delta_2 \delta_2 = \ldots = \Delta_x \delta_x \text{ u. s. w.,}$$

wo Δ_0 und δ_0 die ursprünglichen, die übrigen aber die veränderten Maasse bezeichnen.

Die Gleichung der Beständigkeit des Volumens lässt sich auch folgendermassen schreiben

$$xy = C.$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel, bei welcher die Assymptoten mit den Coordinatenachsen zusammenfallen.

Es folgt hieraus, dass man die Aenderung des Querschnittes mit einer Hyperbel darstellen kann, welche man entweder auf Grund der anfänglichen Δ_0 und δ_0 nach der allbekannten Weise construirt, oder man berechnet nach der Formel $K = \Delta_x \cdot \delta_x$ für verschiedene Werthe von δ_x die Werthe Δ_x und zeichnet die Hyperbel auf, indem man auf die X-Achse die Aenderungen von δ, auf die Y-Achse die Aenderungen von Δ aufträgt. Diese Hyperbel ergiebt die Aenderung des Querschnittes in Abhängigkeit der Höhe. Wenn wir nun die Aenderung des Querschnittes kennen, so sind wir auch im Stande, nach der Kraftgleichung

$$Q = \Delta \cdot Nf \cdot \operatorname{tg} \beta$$

die Aenderung der Druckkraft zu bestimmen. Wir brauchen hierbei nur die veränderten Werthe des Querschnittes mit $Nf \cdot \operatorname{tg} \beta$ zu multipliciren.

Wenn man das Product

$$\Delta \cdot Nf \cdot \operatorname{tg} \beta$$

gleichfalls — wie früher Δ — auf die Achse Y aufträgt, erhält man die Aenderung der Druckkraft Q in Abhängigkeit der Höhe. Da aber die Aenderung der Höhe zugleich der Weg der äusseren Kraft ist, so bedeutet das Schaubild die Aenderung der Druckkraft in Abhängigkeit des Weges, d. h. das Arbeitsdiagramm der Druckbeanspruchung.

b) In solchen Fällen, wo

$$\delta < 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg} \beta$$

ist, berechnet man den Kraftbedarf folgendermassen.

Vorausgesetzt, dass auf die Druckfläche nur gleichmässig vertheilte Kräfte wirken, deren Werth pro Flächeneinheit

$$q = Nf \cdot \operatorname{tg} \beta$$

ist, kann man aus den netzartigen Bildern der Kraftübertragung (in Fig. 48, 51 und 54, Taf. VI) sehen, dass auf die Moleküle des Theiles $b' d' d b$ **je vier** sich im Gleichgewichte befindliche Kräfte wirken, die deshalb unbeweglich sind und in erwähnten Figuren mit stärkeren Punkten bezeichnet wurden.

Um die Annäherung des Werkzeuges möglich zu machen, müssen wir auf die unbewegliche Molekülgruppe eine neuere Kraft einwirken lassen.

Nachdem aber diese gebundene Molekülgruppe keine cylindrische Form besitzt, so fragt es sich, von welchem Punkte an man diese neuere Kraft wirken lassen soll.

Unstreitig brauchen wir auf die Theile $a b'$ und $c d'$ keine neuere Kraft einwirken zu lassen, da diese sich schon bewegen. Wir lassen deshalb die Kraft einstweilen auf jene Theile wirken, welche zwischen b' und d' liegen, so wie es Fig. 49 zeigt.

Um die Wirkung dieser neuen Kraft klarer darzustellen, bezeichnen wir zuerst in Fig. 49 die Resultanten der am ganzen Querschnitte gleichmässig vertheilten Kräfte, so wie wir sie in Fig. 48 erhielten. Dann bezeichnen wir hierzu die Wirkung der neuen Kräfte, welche wir uns zwischen b' und d' als auch zwischen b und d gleichmässig vertheilt denken, und schliesslich construiren wir die Resultanten der Komponenten. Aus dem so erzeugten Bilde (Fig. 49) ist erkennbar, dass die Schubwirkung der äusseren Kraft jetzt auf die Theile $a\,g\,g'\,a'$ und $c\,m\,m'\,c'$ wirkt, und dass im Theile $g'\,m\,m'\,g$ noch immer im Gleichgewichte stehende Komponenten vorhanden sind, daher dieser noch immer aus unbeweglichen Molekülen besteht.

Das Werkzeug kann sich also noch immer nicht nähern, weshalb wir auf den Querschnittstheil $g\,m'$ eine weitere Druckkraft einwirken lassen müssen, wie es Fig. 50 zeigt. Um die Wirkung dieser letztgenannten äusseren Kraft klarer darzustellen, zeichnen wir in die Fig. 50 zuerst jene Resultanten auf, welche wir in Fig. 49 erhielten, dann die Wirkung der neueren Druckkräfte und zuletzt die Resultanten der Komponenten. Aus der so verfertigten Fig. 50 ist ersichtlich, dass die Schubwirkung der äusseren Kraft sich jetzt schon auf sämmtliche Moleküle erstreckt, die Deformation derselben also möglich ist.

Aus den bisherigen Erörterungen folgt nun, dass in dem Falle, wenn

$$\delta < 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg}\beta,$$

die Belastung der Druckfläche eine mehrfache ist, und zwar dass die erste sich auf den ganzen Querschnitt erstreckt, die zweite nur auf eine Fläche, deren Radius mit $a\,b' = \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ kleiner ist als der Querschnitt, ferner die dritte auf eine Fläche, deren Radius mit $a\,b' = \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$. kleiner ist als der Querschnitt der zweiten Belastung u. s. w., also dass jede neuere Belastung auf eine immer kleiner werdende Fläche wirkt, und dass der Radius jeder folgenden Fläche mit der Grösse $\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ kleiner ist.

Bevor wir diese Annahme als giltig erachten, untersuchen wir noch, ob es nicht zweckmässig wäre, den Radius der Flächen in grösserem Maasse z. B. mit $1{\cdot}5 \cdot \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ oder mit $2 \cdot \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ zu verkleinern.

Diese Bedingungen vor Augen haltend, sind in den Fig. 51, 52 und 53, beziehungsweise in Fig. 54, 55 und 56 die Komponenten und deren Resultanten ebenso dargestellt, wie bei der früheren Bedingung (in den Fig. 48, 49 und 50). Aus diesen Figuren ist ersichtlich, dass in den angenommenen Fällen einzelne Moleküle sich gegen die Druckfläche bewegen müssten, was aber nicht möglich ist. Letztere Bedingungen sind also nicht entsprechend; dieselben können daher nicht in Betracht gezogen werden.

Richtig ist nur die erste Annahme, d. h. dass der Durchmesser jeder neueren Belastung um

$$2ab' = 2 \cdot \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$$

kleiner ist.

Als Resultat können wir sagen, dass, wenn die Oberfläche

der ersten Belastung $\frac{D^2\pi}{4}$ ist, diese bei

„ zweiten „ $(D-2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta)^2 \frac{\pi}{4}$, bei

„ dritten „ $(D-4\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta)^2 \frac{\pi}{4}$, bei

„ vierten „ $(D-6\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta)^2 \frac{\pi}{4}$

u. s. w. sein wird.

Die Druckflächen können wir nun — wie wir sehen — in jedem Falle bestimmen. Um aber auf Grund dieser die Druckkraft berechnen zu können, ist es nöthig, dass wir auch die Belastung der Flächeneinheit kennen.

Betreffs der ersten Belastung wissen wir, dass diese für die Flächeneinheit den Werth von q beträgt. Bezüglich der weiteren Belastungen sei Folgendes bemerkt. Nachdem es nicht ausgeschlossen ist, dass die erste Belastung die Reibung der unbeweglichen Moleküle verändert, muss man im Allgemeinen die Druckkraft für die Flächeneinheit anstatt q im Werthe von $y \cdot q$ nehmen, wo y einen für das Material charakteristischen Factor bedeutet.

Bei der Bestimmung der dritten Belastung pro Flächeneinheit muss man diese aus demselben Grunde wie vorhin, nur als den y-ten Theil der zweiten Belastung, also

$$y\,(yq) = y^2 \cdot q$$

und bei der vierten nur

$$y\,(y^2q) = y^3 \cdot q$$

u. s. w. nehmen.

Nach dieser Annahme entspricht die Druckkraft folgender Formel:

$$Q = \frac{D^2\pi}{4}\, q + (D - 2\delta \operatorname{ctg}\beta)^2 \frac{\pi}{4} \cdot qy +$$

$$+ (D - 4\delta \operatorname{ctg}\beta)^2 \frac{\pi}{4} \cdot qy^2 + (D - 6\delta \operatorname{ctg}\beta)^2 \frac{\pi}{4} \cdot qy^3 + \cdots$$

Diese Formel vereinfacht sich bedeutend, wenn der Ausdruck

$$n = \frac{D}{\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta},$$

beziehungsweise der daraus folgende Werth

$$\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta = \frac{D}{n}$$

in diese Formel substituirt wird.

In diesem Falle ist

$$Q = \frac{D^2\pi}{4} \cdot q + \left[D - \frac{2D}{n}\right]^2 \frac{\pi}{4} \cdot qy + \left[D - \frac{4D}{n}\right]^2 \frac{\pi}{4} qy^2 +$$

$$+ \left[D - \frac{6D}{n}\right]^2 \frac{\pi}{4} \cdot qy^3 + \cdots$$

$$Q = \frac{D^2\pi}{4} \cdot q + D^2\left[1 - \frac{2}{n}\right]^2 \frac{\pi}{4} q y + D^2\left[1 - \frac{4}{n}\right]^2 \frac{\pi}{4} q y^2 + \\ + D\left[1 - \frac{6}{n}\right]^2 \frac{\pi}{4} q y^3 + \cdots$$

Den Werth von $\frac{D^2\pi}{4} q$ herausgehoben und an dessen Stelle $\Delta_x \cdot q$, und anstatt Q den entsprechenden Q_x geschrieben, wird:

$$Q_x = \Delta_x q\left[1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^2 y + \left(1 - \frac{4}{n}\right)^2 y^2 + \left(1 - \frac{6}{n}\right)^2 y^3 + \cdots\right]$$

oder

$$Q_x = \Delta_x q\left[1 + \frac{(n-2)^2}{n^2} y + \frac{(n-4)^2}{n^2} y^2 + \frac{(n-6)^2}{n^2} y^3 + \\ + \frac{(n-8)^2}{n^2} \cdot y^4 + \cdots\right]$$

Wenn wir nun den Werth innerhalb der grossen Klammern mit Z_x bezeichnen, so dass also

$$Z_x = 1 + \frac{(n-2)^2}{n^2} y + \frac{(n-4)^2}{n^2} y^2 + \frac{(n-6)^2}{n^2} y^3 + \cdots$$

sei, so ist

$$Q_x = \Delta_x \cdot q \cdot Z_x = \Delta_x \cdot Nf \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot Z_x.$$

Aus der Formel für Z_x kann man bei gegebenem n die Coëfficienten von y, y^2, y^3 ... bestimmen und da dieselben oft benöthigt werden, so haben wir sie in nachstehender Tabelle zusammengestellt. (Siehe Tabelle der Werthe von Z auf Seite 44, 45.)

Bezüglich y sei bemerkt, dass dessen Werth, je nach der Beschaffenheit des Materials $y \gtreqless 1$ ist.

Bei solchen Materialien, die in Folge der inneren Spannung Wasserverlust erleiden, wie z. B. bei feuchtem Thon oder Brot, ist $y > 1$, weil hier der Reibungscoëfficient mit dem Wasserverluste wächst.

Hier ist der Werth y auch veränderlich, da der Wasserverlust immer geringer wird. Zu diesem Schlusse gelangte ich auf Grund der Versuchsresultate Fr. Kick's, welche er bezüglich der genannten Materialien in seinem Werke über die proportionalen Widerstände mitgetheilt hat, und aus welchen ich den Werth und die Veränderlichkeit von y berechnet habe. Den beiläufigen Werth von Winkel β, dessen man hier bedarf, habe ich für frisches Brot auf Versuchswegen bestimmt.

Bei jenen Materialien, die sich in Folge der inneren Reibung erwärmen, kann, im Falle der Reibungscoëfficient durch die Erwärmung kleiner wird, $y < 1$ sein.

Nur bei jenen Materialien, bei denen die Wärme vollkommen abgeleitet wird, kann $y = 1$ sein.

Aus der allgemeinen Formel der äusseren Kraft

$$Q_x = \Delta_x \cdot Nf \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot Z_x$$

Tabelle der Werthe von Z.

Werthe von $n = \frac{D}{\delta \operatorname{ctg} \beta}$	Formel von Z mit berechneten Coëfficienten der y, y^2, y^3 ...	Correction wenn $y = 0{\cdot}_{55}$	Werthe von Z wenn $y = 1$	Werthe von Z wenn $y = 0{\cdot}_{55}$	Werthe von $n = \frac{D}{\delta \operatorname{ctg} \beta}$
So lange $n<2$ ist, kann Z nicht auftreten und ist $Z = 1$ zu nehmen.		pro $0{\cdot}_1\, n$	—	—	—
3	$1+0{\cdot}_{111}y =$	—	$1{\cdot}_{111}$	$1{\cdot}_{061}$	3
$3{\cdot}_5$	$1+0{\cdot}_{184}y =$	—	$1{\cdot}_{184}$	$1{\cdot}_{101}$	$3{\cdot}_5$
4	$1+0{\cdot}_{25}y =$	—	$1{\cdot}_{25}$	$1{\cdot}_{136}$	4
$4{\cdot}_5$	$1+0{\cdot}_{309}y+0{\cdot}_{012}y^2 =$	$0{\cdot}_{007}$	$1{\cdot}_{321}$	$1{\cdot}_{173}$	$4{\cdot}_5$
5	$1+0{\cdot}_{36}y+0{\cdot}_{04}y^2 =$	$0{\cdot}_{008}$	$1{\cdot}_{4}$	$1{\cdot}_{212}$	5
$5{\cdot}_5$	$1+0{\cdot}_{405}y+0{\cdot}_{0748}y^2 =$	$0{\cdot}_{003}$	$1{\cdot}_{479}$	$1{\cdot}_{226}$	$5{\cdot}_5$
6	$1+0{\cdot}_{435}y+0{\cdot}_{11}y^2 =$	$0{\cdot}_{009}$	$1{\cdot}_{545}$	$1{\cdot}_{273}$	6
$6{\cdot}_5$	$1+0{\cdot}_{479}y+0{\cdot}_{148}y^2+0{\cdot}_{006}y^3 =$	$0{\cdot}_{007}$	$1{\cdot}_{633}$	$1{\cdot}_{309}$	$6{\cdot}_5$
7	$1+0{\cdot}_{51}y+0{\cdot}_{182}y^2+0{\cdot}_{02}y^3 =$	$0{\cdot}_{006}$	$1{\cdot}_{712}$	$1{\cdot}_{337}$	7
$7{\cdot}_5$	$1+0{\cdot}_{54}y+0{\cdot}_{189}y^2+0{\cdot}_{0224}y^3 =$	$0{\cdot}_{004}$	$1{\cdot}_{751}$	$1{\cdot}_{357}$	$7{\cdot}_5$
8	$1+0{\cdot}_{56}y+0{\cdot}_{266}y^2+0{\cdot}_{062}y^3 =$	$0{\cdot}_{008}$	$1{\cdot}_{888}$	$1{\cdot}_{398}$	8
$8{\cdot}_5$	$1+0{\cdot}_{588}y+0{\cdot}_{281}y^2+0{\cdot}_{0868}y^3+0{\cdot}_{0034}y^4 =$	$0{\cdot}_{004}$	$1{\cdot}_{958}$	$1{\cdot}_{42}$	$8{\cdot}_5$
9	$1+0{\cdot}_{605}y+0{\cdot}_{309}y^2+0{\cdot}_{111}y^3+0{\cdot}_{0123}y^4 =$	$0{\cdot}_{005}$	$2{\cdot}_{037}$	$1{\cdot}_{445}$	9
$9{\cdot}_5$	$1+0{\cdot}_{621}y+0{\cdot}_{335}y^2+0{\cdot}_{139}y^3+0{\cdot}_{025}y^4 =$	$0{\cdot}_{004}$	$2{\cdot}_{12}$	$1{\cdot}_{1658}$	$9{\cdot}_5$
10	$1+0{\cdot}_{64}y+0{\cdot}_{36}y^2+0{\cdot}_{10}y^3+0{\cdot}_{4}y^4 =$	$0{\cdot}_{007}$	$2{\cdot}_{2}$	$1{\cdot}_{49}$	10
$10{\cdot}_5$	$1+0{\cdot}_{66}y+0{\cdot}_{394}y^2+0{\cdot}_{185}y^3+0{\cdot}_{0509}y^4+0{\cdot}_{0022}y^5 =$	$0{\cdot}_{004}$	$2{\cdot}_{288}$	$1{\cdot}_{618}$	$10{\cdot}_5$

11	$1+0{\cdot}_{67}y+0{\cdot}_{406}y^2+0{\cdot}_{207}y^3+0{\cdot}_{075}y^4+0{\cdot}_{0084}y^5=$	$0{\cdot}_{004}$	$2{\cdot}_{366}$	$1{\cdot}_{531}$	11
$11{\cdot}_5$	$1+0{\cdot}_{688}y+0{\cdot}_{425}y^2+0{\cdot}_{229}y^3+0{\cdot}_{095}y^4+0{\cdot}_{017}y^5=$	$0{\cdot}_{004}$	$2{\cdot}_{45}$	$1{\cdot}_{553}$	$11{\cdot}_5$
12	$1+0{\cdot}_{695}y+0{\cdot}_{444}y^2+0{\cdot}_{25}y^3+0{\cdot}_{111}y^4+0{\cdot}_{0275}y^5=$	$0{\cdot}_{003}$	$2{\cdot}_{527}$	$1{\cdot}_{565}$	12
$12{\cdot}_5$	$1+0{\cdot}_{705}y+0{\cdot}_{465}y^2+0{\cdot}_{272}y^3+0{\cdot}_{13}y^4+0{\cdot}_{04}y^5+0{\cdot}_{0016}y^6=$	$0{\cdot}_{004}$	$2{\cdot}_{61}$	$1{\cdot}_{585}$	$12{\cdot}_5$
13	$1+0{\cdot}_{724}y+0{\cdot}_{48}y^2+0{\cdot}_{291}y^3+0{\cdot}_{148}y^4+0{\cdot}_{053}y^5+0{\cdot}_{0059}y^6=$	$0{\cdot}_{004}$	$2{\cdot}_{701}$	$1{\cdot}_{6048}$	13
$13{\cdot}_5$	$1+0{\cdot}_{725}y+0{\cdot}_{497}y^2+0{\cdot}_{308}y^3+0{\cdot}_{166}y^4+0{\cdot}_{069}y^5+0{\cdot}_{0124}y^6=$	$0{\cdot}_{003}$	$2{\cdot}_{777}$	$1{\cdot}_{618}$	$13{\cdot}_5$
14	$1+0{\cdot}_{73}y+0{\cdot}_{51}y^2+0{\cdot}_{324}y^3+0{\cdot}_{184}y^4+0{\cdot}_{081}y^5+0{\cdot}_{02}y^6=$	$0{\cdot}_{002}$	$2{\cdot}_{848}$	$1{\cdot}_{629}$	14
$14{\cdot}_5$	$1+0{\cdot}_{748}y+0{\cdot}_{529}y^2+0{\cdot}_{346}y^3+0{\cdot}_{20}y^4+0{\cdot}_{097}y^5+0{\cdot}_{0298}y^6+0{\cdot}_{00119}y^7=$	$0{\cdot}_{004}$	$2{\cdot}_{95}$	$1{\cdot}_{65}$	$14{\cdot}_5$
15	$1+0{\cdot}_{752}y+0{\cdot}_{542}y^2+0{\cdot}_{36}y^3+0{\cdot}_{218}y^4+0{\cdot}_{111}y^5+0{\cdot}_{04}y^6+0{\cdot}_{0044}y^7=$	$0{\cdot}_{003}$	$3{\cdot}_{029}$	$1{\cdot}_{663}$	15
$15{\cdot}_5$	$1+0{\cdot}_{762}y+0{\cdot}_{55}y^2+0{\cdot}_{37}y^3+0{\cdot}_{234}y^4+0{\cdot}_{126}y^5+0{\cdot}_{052}y^6+0{\cdot}_{0094}y^7=$	$0{\cdot}_{002}$	$3{\cdot}_{10}$	$1{\cdot}_{6749}$	$15{\cdot}_5$
16	$1+0{\cdot}_{77}y+0{\cdot}_{56}y^2+0{\cdot}_{38}y^3+0{\cdot}_{25}y^4+0{\cdot}_{14}y^5+0{\cdot}_{0622}y^6+0{\cdot}_{015}y^7=$	$0{\cdot}_{001}$	$3{\cdot}_{177}$	$1{\cdot}_{6878}$	16
$16{\cdot}_5$	$1+0{\cdot}_{771}y+0{\cdot}_{574}y^2+0{\cdot}_{407}y^3+0{\cdot}_{266}y^4+0{\cdot}_{156}y^5+0{\cdot}_{074}y^6+0{\cdot}_{023}y^7+0{\cdot}_{0009}y^8=$	$0{\cdot}_{002}$	$3{\cdot}_{271}$	$1{\cdot}_{699}$	$16{\cdot}_5$
17	$1+0{\cdot}_{78}y+0{\cdot}_{585}y^2+0{\cdot}_{422}y^3+0{\cdot}_{28}y^4+0{\cdot}_{17}y^5+0{\cdot}_{0865}y^6+0{\cdot}_{0312}y^7+0{\cdot}_{0034}y^8=$	$0{\cdot}_{002}$	$3{\cdot}_{357}$	$1{\cdot}_{712}$	17
$17{\cdot}_5$	$1+0{\cdot}_{784}y+0{\cdot}_{598}y^2+0{\cdot}_{432}y^3+0{\cdot}_{296}y^4+0{\cdot}_{184}y^5+0{\cdot}_{099}y^6+0{\cdot}_{0412}y^7+0{\cdot}_{00738}y^8=$	$0{\cdot}_{002}$	$3{\cdot}_{441}$	$1{\cdot}_{721}$	$17{\cdot}_5$
18	$1+0{\cdot}_{79}y+0{\cdot}_{605}y^2+0{\cdot}_{445}y^3+0{\cdot}_{308}y^4+0{\cdot}_{204}y^5+0{\cdot}_{111}y^6+0{\cdot}_{0494}y^7+0{\cdot}_{0123}y^8=$	$0{\cdot}_{002}$	$3{\cdot}_{524}$	$1{\cdot}_{731}$	18
$18{\cdot}_5$	$1+0{\cdot}_{795}y+0{\cdot}_{614}y^2+0{\cdot}_{459}y^3+0{\cdot}_{324}y^4+0{\cdot}_{212}y^5+0{\cdot}_{124}y^6+0{\cdot}_{0594}y^7+0{\cdot}_{0183}y^8+0{\cdot}_{00073}y^9=$	$0{\cdot}_{002}$	$3{\cdot}_{60}$	$1{\cdot}_{742}$	$18{\cdot}_5$
19	$1+0{\cdot}_{8}y+0{\cdot}_{624}y^2+0{\cdot}_{468}y^3+0{\cdot}_{335}y^4+0{\cdot}_{224}y^5+0{\cdot}_{136}y^6+0{\cdot}_{0693}y^7+0{\cdot}_{0249}y^8+0{\cdot}_{00277}y^9=$.	$0{\cdot}_{002}$	$3{\cdot}_{682}$	$1{\cdot}_{7518}$	19
20	$1+0{\cdot}_{813}y+0{\cdot}_{64}y^2+0{\cdot}_{49}y^3+0{\cdot}_{36}y^4+0{\cdot}_{25}y^5+0{\cdot}_{165}y^6+0{\cdot}_{09}y^7+0{\cdot}_{04}y^8+0{\cdot}_{01}y^9=$ . . .	—	$3{\cdot}_{85}$	$1{\cdot}_{77}$	20
$20{\cdot}_5$	$1+0{\cdot}_{815}y+0{\cdot}_{647}y^2+0{\cdot}_{5}y^3+0{\cdot}_{374}y^4+0{\cdot}_{264}y^5+0{\cdot}_{173}y^6+0{\cdot}_{101}y^7+0{\cdot}_{048}y^8+0{\cdot}_{0149}y^9+$ $+0{\cdot}_{00059}y^{10}=$	—	$3{\cdot}_{936}$	—	$20{\cdot}_5$
21	$1+0{\cdot}_{817}y+0{\cdot}_{656}y^2+0{\cdot}_{511}y^3+0{\cdot}_{384}y^4+0{\cdot}_{275}y^5+0{\cdot}_{184}y^6+0{\cdot}_{11}y^7+0{\cdot}_{056}y^8+0{\cdot}_{0204}y^9+$ $+0{\cdot}_{00227}y^{10}=$	—	$4{\cdot}_{015}$	—	21

lässt sich auch das Verhältniss der Druckkraft zur Druckfläche bestimmen. Nehmen wir an, dass aus demselben Materiale verschieden grosse Cylinder angefertigt werden und dass die Dimensionen des einen Cylinders durch Δ_1, δ_1, die des anderen durch Δ_2, δ_2 gegeben sind, so ist

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\Delta_2 \cdot Z_2}{\Delta_1 \cdot Z_1},$$

woraus folgt, dass die äussere Kraft nur dann proportional zur Oberfläche ist, wenn $Z_2 = Z_1$ ist.

Dies bedingt aber, dass $n_2 = n_1$, also

$$\frac{D_2}{\delta_2 \cdot \operatorname{ctg}\beta} = \frac{D_1}{\delta_1 \cdot \operatorname{ctg}\beta},$$

oder dass

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{\delta_2}{\delta_1} \text{ sei.}$$

Diese Bedingung bedeutet aber bei Kreiscylindern Proportionalität, weshalb man im Allgemeinen sagen kann, dass die Druckkraft nur bei proportionalen Körpern zur Oberfläche proportional ist.

20. Material III. Gruppe.

Material mit constantem f, wobei $Nf = p_0$ ist.

So lange die Schubwirkung der äusseren Kraft ($q \cdot \operatorname{ctg}\beta$) den Werth der inneren Reibung nicht erreicht, verbreitet sich die Wirkung der äusseren Kraft auf bekannte Weise über den ganzen Stab, ohne eine bleibende Verschiebung hervorzurufen; wenn aber dieser Werth erreicht wird, d. h. wenn

$$q \cdot \operatorname{ctg}\beta = Nf$$

ist und die Kraft langsam wächst, dann bewirkt der Ueberschuss an Kraft in den mit $a\,b\,d$, $c\,b\,e$ und $a'\,b'\,d'$, $c'\,b'\,e'$ bezeichneten Theilen (Fig. 41—45, Taf. VI) eine Deformation. Diese Theile erhalten nun eine Beschleunigung, die so gross sein kann, dass die Cohäsion diese noch zu vermitteln im Stande ist.

Man darf also sagen, dass diese Materialien bei langsamem Druck zwar deformiren, bei Schlagwirkung aber nicht.

Es sei noch bemerkt, dass diese Materialien sich bei langsamem Druck nur so lange deformiren, als sie sich in Folge der molekularen Reibung nicht zu sehr erwärmt haben; denn in erwärmtem Zustande des Materials verkleinert sich die Cohäsion und es kommt jener Fall zur Geltung, wo $p_0 < Nf$, weshalb dann der Bruch eintritt.

Die zur Deformation nöthige Druckkraft entspricht der schon weiter oben (S. 39) mitgetheilten Formel. Wenn also

$$\delta > 0{\cdot}5\, D \cdot \operatorname{tg}\beta,$$

so ist

$$Q_x = \Delta_x \cdot q = \Delta_x \cdot Nf \cdot \operatorname{tg}\beta$$

und wenn $\delta < 0{\cdot}5\,D \cdot \operatorname{tg}\beta$,
so ist $Q_x = \Delta_x \cdot q \cdot Z_x = \Delta_x \cdot Nf \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot Z_x$
und nehmen die Versuchsstäbe hierbei auch dieselbe Gestalt an, wie die der früheren Gruppe.

21. Gemeinsame Eigenschaften der zähen Materialien, d. h. derjenigen, welche einen veränderlichen Reibungscoëfficienten haben.

So lange die Schubwirkung der äusseren Kraft ($q \cdot \operatorname{ctg}\beta$) kleiner ist als der Werth der inneren Reibung, treten die im allgemeinen Theile erwähnten Verhältnisse auf, d. h. die Wirkung der äusseren Kraft vertheilt sich über den ganzen Stab, ohne eine Formänderung hervorzubringen. Sobald aber die Schubwirkung grösser ist als die innere Reibung, werden die Theile $a\,b\,c$ und $a'\,b'\,c'$ der Fig. 41, Taf. VI festgehalten, die Moleküle der Theile $a\,b\,d$, $c\,b\,e$, $a'\,b'\,d'$, $c'\,b'\,e'$ aber verschoben. Durch die Verschiebung der Moleküle wächst nach unserer Voraussetzung der Reibungscoëfficient und wird deshalb in diesen Theilen die innere Reibung wieder grösser als die Schubwirkung der äusseren Kraft, wodurch die Moleküle festgehalten und zur Uebertragung der äusseren Kraft befähigt werden. Wenn die äussere Kraft durch diese Moleküle auf den weiter liegenden Theil des Stabes übertragen wird, so hält die Wirkung der äusseren Kraft die Theile $d\,b\,e\,g$ und $d'\,b'\,e'\,g'$ fest und verschiebt die Theile $d\,g\,d'$ und $e\,g\,e'$ so lange, bis sie auch durch die wachsende Reibung festgehalten werden. Wenn der Stab länger ist, so werden diese gebundenen Theile die Wirkung der äusseren Kraft auf die weiteren Theile fortpflanzend so lange übertragen, bis endlich die Wirkung der äusseren Kraft sich über den ganzen Stab verbreitet hat.

Nachdem die Wirkung der anfänglichen äusseren Kraft sich schon über den ganzen Stab verbreitet hat, kann man die Kraft wachsen lassen, und wenn deren Werth während einer kurzen Zeitspanne constant bleibt, wird deren Wirkung wieder auf die schon beschriebene Weise fortschreitend zur Geltung gelangen.

Wir sehen nun, dass, so lange der Reibungscoëfficient einen wachsenden Werth annimmt, die Wirkung der äusseren Kraft und daher auch die Deformation sich auf den ganzen Stab gleichmässig vertheilt (ausgenommen die Ausbiegung der langen Stäbe), weshalb wir diese d. h. die der Zähigkeit entsprechende, gleichmässige Formänderung nennen wollen.

Bei der gleichmässigen Formänderung lässt sich für alle Fälle die Druckfläche aus der Beständigkeit des Kubikinhaltes berechnen, nachdem

$$K = \Delta_0 \cdot \delta_0 = \Delta_1 \cdot \delta_1 = \Delta_2 \cdot \delta_2 = \Delta_x \cdot \delta_x \ldots \text{ ist.}$$

Die Druckfläche ist daher als bekannt anzusehen und wenn wir noch in Betracht ziehen, dass die Schubwirkung der äusseren Kraft mit der veränderten inneren Reibung gleich sein muss, also dass

$$q_0 \cdot \operatorname{tg}\beta = Nf_0, \qquad q_1 \cdot \operatorname{tg}\beta = Nf_1 \text{ u. s. w.}$$

so können wir den Werth der Druckkraft mit Hilfe der bekannten Formel folgendermassen berechnen: 1. wenn $\delta > 0{\cdot}5\,D \cdot \mathrm{tg}\,\beta$

$$Q_0 = \Delta_0 \cdot q_0 = \Delta_0 \cdot Nf_0 \cdot \mathrm{tg}\,\beta$$
$$Q_1 = \Delta_1 \cdot q_1 = \Delta_1 \cdot Nf_1 \cdot \mathrm{tg}\,\beta$$
$$Q_2 = \Delta_2 \cdot q_2 = \Delta_2 \cdot Nf_2 \cdot \mathrm{tg}\,\beta$$

und 2. wenn $\delta < 0{\cdot}5\,D \cdot \mathrm{tg}\,\beta$

$$Q_0 = \Delta_0 \cdot q_0 \cdot Z_0 = \Delta_0 \cdot Nf_0 \cdot \mathrm{tg}\,\beta \cdot Z_0$$
$$Q_1 = \Delta_1 \cdot q_1 \cdot Z_1 = \Delta_1 \cdot Nf_1 \cdot \mathrm{tg}\,\beta \cdot Z_1$$
$$Q_2 = \Delta_2 \cdot q_2 \cdot Z_2 = \Delta_2 \cdot Nf_2 \cdot \mathrm{tg}\,\beta \cdot Z_2.$$

In dieser Formelreihe bedeutet Δ_0 und Nf_0, Z_0 den Anfangswerth, die übrigen die veränderten Werthe.

Bei der Berechnung muss man aber darauf achten, dass man den jeweiligen Querschnitt immer mit der bei diesem Querschnitte auftretenden inneren Reibung und mit dem entsprechenden Werthe von Z multiplicire.

Die entsprechende innere Reibung lässt sich aus jenem Schaubilde der Reibung bestimmen, welches wir von dem Zugdiagramme abgeleitet haben. (Siehe Fig. 13, Taf. IV.)

In diesem ist nämlich die innere Reibung als Function der procentualen Maassverlängerung (Dehnung) aufgetragen. Wenn wir die Maasszunahme beim Druck, d. h. die Vergrösserung des Durchmessers in Procenten ausdrücken, so können wir die Abscisse des Schaubildes als die procentuale Vergrösserung des Durchmessers betrachten und werden daher die Ordinaten die entsprechende innere Reibung (Nf) bezeichnen.

Mit Hilfe der Kraftformel sind wir nun im Stande, die veränderten Werthe der äusseren Kraft zu berechnen. Wenn wir diese Werthe als Ordinaten, den Weg der äusseren Kraft als Abscissen auftragen, erhalten wir das Schaubild der äusseren Kraft, welches wir Arbeitsdiagramm der Druckbeanspruchung oder kurz Druckdiagramm nennen. Der Vorgang bei dieser Berechnung und Construction ist folgender.

Im Sinne der Kraftformel ist

$$Q = \Delta \cdot Nf \cdot \mathrm{tg}\,\beta,$$

d. h. man multiplicire den Querschnitt mit dem Werthe der Reibung (Nf) und mit $\mathrm{tg}\,\beta$, welch letzteren Werth wir vorläufig als bekannt voraussetzen.

Der leichteren Handhabung wegen ist es zweckmässig, das Product $Nf \cdot \mathrm{tg}\,\beta$ graphisch darzustellen. Zu diesem Zwecke multiplicire man die Werthe von Nf der Fig. 14, Taf. IV, welche die Copie der Fig. 13 ist, mit $\mathrm{tg}\,\beta$ und trage diese Producte in der Richtung von Nf auf, verbinde die Punkte mit einer Curve und bezeichne diese mit $Nf \cdot \mathrm{tg}\,\beta$, wie dies aus Fig. 14 ersichtlich ist. Um den ersten Punkt des Druckdiagrammes zu erhalten, multiplicire man den Anfangswerth von

$$Nf_0 \cdot \mathrm{tg}\,\beta = \alpha_0\, \bar{n}_0$$

mit dem anfänglichen Querschnitte Δ_0 und es sei dieses

$$\overline{\alpha_0 n_0} \cdot \Delta_0 = \overline{\alpha_0 e_0}$$

Nun trage man dieses Product in Fig. 15 als Ordinate auf. Bei den weiteren Punkten bildet der Weg der Druckkraft, welcher mit der Differenz der anfänglichen und der veränderten Höhe des Stabes gleich ist, den Werth der Abscisse. Die Abscissenwerthe erhält man, wenn man, von dem Anfangspunkte des Druckdiagrammes ausgehend, den Werth δ_0 (in Fig. 15 nach rechts) und dann von dessen Endpunkte ω die veränderten Werthe der Höhe, also $\delta_1\ \delta_2 \ldots$ gegen den Anfangspunkt zu (in der Fig. 15 nach links) aufträgt. Die Endpunkte der veränderten Höhe (in Fig. 15 die Punkte a_1 $a_2\ a_3 \ldots .$) sind die Grenzpunkte der Abscissenwerthe, folglich ist

$$\overline{a_0 a_1} = \delta_0 - \delta_1$$
$$\overline{a_0 a_2} = \delta_0 - \delta_2$$
$$\overline{a_0 a_3} = \delta_0 - \delta_3$$

welche Werthe den Weg der Druckkraft bedeuten.

Um die Werthe der Ordinaten in den Punkten $a_1\ a_2\ a_3$ berechnen zu können, ist es nothwendig, dass man die procentuale Dehnung des Durchmessers der Höhenwerthe von $\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3 \ldots$ kenne.

Im Allgemeinen ist

$$\lambda_1 = \frac{D_1 - D_0}{D_0} \cdot 100.$$

In dieser Formel ist (D_1) noch unbekannt. Nachdem aber

$$\Delta_0 \delta_0 = \Delta_0 \delta_1$$

ist, so wird

$$\Delta_1 = \Delta_0 \frac{\delta_0}{\delta_1}$$

sein, oder aber die Querschnitte im Durchmesser ausgedrückt,

$$D_1^2 \frac{\pi}{4} = D_0^2 \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\delta_0}{\delta_1}$$

$$D_1 = D_0 \sqrt{\frac{\delta_0}{\delta_1}}.$$

Wenn wir jetzt die Werthe der procentualen Vergrösserung des Durchmessers im Schaubilde des $Nf \cdot \operatorname{tg} \beta$ in Fig. 14 als Abscisse auftragen, erhalten wir in den Ordinaten die entsprechenden Werthe der Grössen $Nf \cdot \operatorname{tg} \beta$.

Es ist also

$$\overline{\alpha_1 n_1} = Nf_1 \cdot \operatorname{tg} \beta$$
$$\overline{\alpha_2 n_2} = Nf_2 \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Diese Werthe sind mit den entsprechenden Querschnitten zu multipliciren und das Product als Ordinaten in Fig. 15 aufzutragen.

Es sei also:

$$\Delta_1 \cdot \overline{a_1 n_1} = a_1 e_1$$
$$\Delta_2 \cdot \overline{a_2 n_2} = a_2 e_2.$$

Wenn wir die so erhaltenen Punkte $e_0\, e_1\, e_2\, e_3$ durch eine continuirliche Linie verbinden, erhalten wir jene Curve, welche die Aenderung der Druckkraft in Abhängigkeit des Weges zeigt und die wir in Fig. 15 mit Q bezeichnet sehen.

Um dieses Diagramm construiren zu können, müssen wir die Werthe Δ_0, Δ_1, Δ_2 u. s. w., ferner D_1, D_2, $D_3 \ldots$ unbedingt berechnen. Wenn wir dann diese Werthe auf dasselbe Coordinatensystem als Ordinaten auftragen, so erhalten wir die in Fig. 15 mit D und Δ bezeichneten Curven, mit deren Hilfe wir die entsprechenden Werthe von $Nf \cdot \operatorname{tg} \beta$ graphisch bestimmen können. Der Vorgang dieser Construction ist folgender.

Als Ausgangspunkt nehmen wir die allgemeine Formel der procentualen Maassvergrösserung an, d. h.

$$\lambda_1 = \frac{D_1 - D_0}{D_0} \cdot 100.$$

Wenn wir diese Formel folgendermassen schreiben

$$\frac{\lambda_1}{D_1 - D_0} = \frac{100}{D_0},$$

so können wir diese Verhältnisse mit ähnlichen Dreiecken darstellen.

Zu diesem Zwecke nehmen wir vom Anfangspunkte des Schaubildes der inneren Reibung, also in Fig. 14 von α_0, die Linie $AB = 100$ an, erheben in B die Senkrechte BC, projiciren auf diese aus der Curve D die entsprechenden Punkte des Durchmessers, wodurch wir auf der Linie BC die Werthe des Durchmessers übereinander gelegt erhalten.

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} D_0 &= \overline{B\gamma_0}, \\ D_1 &= \overline{B\gamma_1}, \\ D_2 &= \overline{B\gamma_2}, \text{ folglich} \\ \overline{\gamma_0\gamma_1} &= D_1 - D_0, \\ \overline{\gamma_0\gamma_2} &= D_2 - D_0 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Dann verbinden wir den Punkt γ_0 der Linie $B\overline{C}$ mit dem in Fig. 14 sichtbaren Anfangspunkte α_0, ziehen mit dieser Verbindungslinie AC parallele Linien aus den Punkten $\gamma_1\, \gamma_2 \ldots$, bis diese die wagrechte Achse des Schaubildes von $Nf \cdot \operatorname{tg} \beta$ schneiden. Die in diesen Schnittpunkten erhobenen Ordinaten sind die gesuchten Werthe der inneren Reibung, wie dies aus den ähnlichen Dreiecken ABC und $\alpha_1 B\gamma_1$ klar wird.

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{\alpha_0\alpha_1} : \overline{\gamma_0\gamma_1} \text{ oder}$$

$$\overline{\alpha_0\alpha_1} = \frac{AB \cdot \overline{\gamma_0\gamma_1}}{BC}.$$

Weil aber

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= 100, \\ BC &= D_0 \text{ und} \\ \gamma_0\gamma_1 &= D_1 - D_0, \text{ so ist} \\ \overline{a_0 a_1} &= \frac{D_1 - D_0}{D_0} \cdot 100. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist jedoch identisch mit jener, welche wir auf Seite 50 für λ erhielten, folglich ist

$$\overline{a_0 a_1} = \lambda_1, \ \overline{a_0 a_2} = \lambda_2 \ldots \text{ u. s. w.}$$

und sind deshalb die in a_1, a_2, $a_3 \ldots$ errichteten Ordinaten die gesuchten Werthe der inneren Reibung.

Mit Hilfe der beschriebenen graphischen Darstellung erhält man in jedem beliebigen Stadium der Formänderung die Druckkraft.

Nehmen wir z. B. an, dass wir jene Druckkraft suchen, die auftritt, wenn der Stab von der anfänglichen Höhe δ_0 auf die Höhe δ_4 deformirt wurde.

Man trage in diesem Falle vom Endpunkte des δ_0 die Höhe δ_4 auf, so dass in Fig. 15, Taf. IV $\overline{\alpha_0 \alpha_4} = \delta_0 - \delta_4$ sei; dann erhebe man in a_4 eine Senkrechte solcher Länge, dass diese die Curve D schneide. Diesen Schnittpunkt projicire man auf die Linie $\overline{BC}$ und ziehe von dem erhaltenen Punkte γ_4 eine mit $\overline{AC}$ parallele Linie, bis diese die horizontale Achse des Reibungsdiagrammes in α_4 Fig. 14 schneidet; die Ordinate dieses Punktes ist der Werth des $Nf \cdot \operatorname{tg} \beta$, also

$$\overline{\alpha_4 n_4} = Nf_4 \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

welchen man nur mit Δ_4 zu multipliciren braucht, um die Druckkraft zu erlangen, so dass also

$$Q = \Delta_4 \cdot \overline{\alpha_4 n_4} \text{ ist.}$$

In solchen Fällen, wo die Höhe des Cylinders $\delta < 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg} \beta$ ist, kommt in der Kraftformel auch Z vor. Den Werth dieses Gliedes kann man der Tabelle Z entnehmen, sobald man aus den Werthen D_1, D_2, $D_3 \ldots$ und δ_1, δ_2, $\delta_3 \ldots$ die Werthe n_1, n_2, $n_3 \ldots$ nach der Formel

$$n = \frac{D}{\delta \cdot \operatorname{ctg} \beta}$$

berechnet und der Werth von y, der die Eigenschaft des Materials charakterisirt, bekannt ist.

Den Werth von y nehmen wir einstweilen, so wie früher den Werth von β, als bekannt an. Beide Werthe werden für jedes Material durch Versuche ermittelt. Die Werthe von Z kann man in demselben Coordinaten-System auftragen und erhält auf diese Art auch eine Curve Z. Mit Hilfe der Curven Δ, D, Z und $Nf \cdot \operatorname{tg} \beta$ kann man den Einfluss der geänderten Verhältnisse ersichtlich machen.

Wie dies geschieht, wollen wir im Folgenden zeigen:

Nehmen wir an, dass das Anfangsmaass des zu deformirenden Cylinders dasselbe sei wie bisher, nämlich $\Delta_0 \delta_0$, aber sein Material sei durch vorherige Zugbeanspruchung spröde gemacht und zwar in solchem Grade, dass das Schaubild der inneren Reibung bei α_3 beginne.

In diesem Falle trage man die Linie $\overline{A_1 B_1} = 100$ vom Punkte α_3 angefangen auf, errichte hierauf die Senkrechte $\overline{B_1 C_1}$, projicire auf diese die Werthe D_0, D_1, D_2, $D_3 \ldots$, verbinde dann den erhaltenen Punkt ε_0

mit α_3 und ziehe mit $\overline{\varepsilon_0 \alpha_3} = \overline{A_1 C_1}$ aus den übrigen Punkten ε_1, ε_2, ε_3 parallele Linien, bis diese (in Fig. 14) die Abscissenachse schneiden. Die Ordinaten dieser Schnittpunkte sind die entsprechenden Reibungskräfte.

Es ist also

$$\text{bei } \Delta_0 \ldots . \; Nf_0 \cdot \operatorname{tg} \beta = \overline{\alpha_3 n_3},$$
$$\text{„ } \Delta_1 \ldots . \; Nf_1 \cdot \operatorname{tg} \beta = \overline{\alpha_4 n_4},$$
$$\text{„ } \Delta_2 \ldots . \; Nf_2 \cdot \operatorname{tg} \beta = \overline{\alpha_5 n_5}.$$

Wenn wir diese Werthe mit den entsprechenden Querschnitten multipliciren und in Fig. 15, Taf. IV als Ordinaten auftragen, also wenn

$$\Delta_0 \cdot \overline{\alpha_3 n_3} = \overline{a_0 \varrho_0},$$
$$\Delta_1 \cdot \overline{\alpha_4 n_4} = \overline{a_1 \varrho_1},$$
$$\Delta_2 \cdot \overline{\alpha_5 n_5} = \overline{a_2 \varrho_2} \text{ u. s. w.}$$

gemacht wird, so erhalten wir den geänderten Verhältnissen entsprechend, in der Curve $\alpha_0 \varrho_0 \varrho_1 \varrho_2$ das Diagramm der Druckkraft. Aus diesem und aus dem früher gewonnenen Diagramm der Druckkraft ($a_0 e_1 e_2 e_3 e_4$) ist ersichtlich, dass die Deformation des spröde gemachten Materials, trotzdem dass dieselben Dimensionen beibehalten wurden, nur bei einer verhältnissmässig höheren Druckkraft ($\overline{a_0 \varrho_0} = \Delta_0 \cdot \overline{\alpha_3 m_3} \cdot \operatorname{tg} \beta$) entsteht, als bei dem noch nicht beanspruchten Material, wo die Druckkraft

$$\overline{\alpha_0 e_0} = \Delta_0 \cdot \overline{\alpha_0 m_0} \cdot \operatorname{tg} \beta \text{ war.}$$

Nachdem aber jene Materialien, die einer grösseren Druckkraft widerstehen, härter genannt werden und da in den angenommenen Fällen die Erhöhung der Druckkraft nur durch Erhöhung der inneren Reibung entstanden ist, so können wir sagen, dass die Härte von dem Werthe der inneren Reibung abhängt und dass der Werth der inneren Reibung das Maass der Härte sei.

Wenn nun das Material einen veränderlichen Werth der inneren Reibung hat, so ist auch dessen Härte veränderlich, weshalb man bei diesen Materialien eine anfängliche und eine maximale Härte unterscheiden muss.

Wie wir wissen, wächst bei zähen Materialien der Werth der inneren Reibung bei jederartigen Deformation; wir dürfen daher als allgemein giltig aussprechen: Jede Formänderung vermindert die Zähigkeit und vermehrt die Elasticitätsgrenze, Sprödigkeit und Härte.

Betrachten wir einen anderen Fall. Nehmen wir an, dass das Material weich war und dass wir es unter normalen Verhältnissen so weit zusammengedrückt hätten, bis die anfängliche Höhe δ_0 auf δ_6 reducirt wurde.

Der Weg der hierbei gebrauchten äusseren Kraft wäre nun durch $\delta_0 - \delta_6 = \overline{a_0 a_6}$, und die nothwendige Arbeitsmenge durch Fläche $a_0 e_0 e_6 a_6$ in Fig. 15, Taf. VI ausgedrückt.

Nehmen wir ferner an, dass wir ein aus demselben weichen Material erzeugtes Versuchsstück nur so weit zusammendrücken, bis seine anfäng-

liche Höhe δ_0 auf δ_2 reducirt wird. Der Weg der äusseren Kraft wäre also $\delta_0 - \delta_2 = \overline{a_0 a_2}$ (in Fig. 15) und die maximale äussere Kraft $\overline{a_2 e_2}$, der Querschnitt Δ_2 und die Arbeitsfläche $a_0 e_0 e_2 a_2$.

Nach dieser Beanspruchung glühen wir das Material aus und beanspruchen es dann neuerdings. Bei dieser zweiten Beanspruchung hat die innere Reibung denselben anfänglichen Werth als bei der ersten (weil das Material ausgeglüht wurde). Wir bekommen daher die Werthe der Druckkraft, wenn wir den Projectionspunkt des Durchmessers (D_2), welcher dem jetzigen Querschnitte Δ_2 entspricht, also den Punkt γ_2 auf Linie $\overline{AB}$ mit α_0 als dem Anfangspunkte des Diagrammes der inneren Reibung (siehe Fig. 14 und 15, Taf. IV) verbinden und mit $\overline{\gamma_2 \alpha_0}$ aus den Punkten γ_3, γ_4 . . ., also aus den Projectionspunkten des Durchmessers $D_3 D_4$ . . . parallele Linien ziehen. Hierdurch erhalten wir die Schnittpunkte $\eta_1 \eta_2$ u. s. w., deren Ordinaten die entsprechenden Werthe von Nf sind. Die Werthe der äusseren Kraft sind also:

$$\Delta_2 \cdot \overline{\alpha_0 m_0} \cdot \operatorname{tg} \beta = \overline{a_2 b_0},$$
$$\Delta_3 \cdot \overline{\eta_1 m_1} \cdot \operatorname{tg} \beta = \overline{a_3 b_1},$$
$$\Delta_4 \cdot \overline{\eta_2 m_2} \cdot \operatorname{tg} \beta = \overline{a_4 b_2},$$

welche wir in Fig. 15 als Ordinaten $\overline{a_2 b_0}$, $\overline{a_3 b_1}$, $\overline{a_4 b_2}$ aufgetragen haben, wodurch wir die Arbeitsfläche dieser zweiten Beanspruchung durch $a_2 b_0 b_1 b_2$ dargestellt erhalten.

Wenn wir das Material neuerdings ausglühen und einer dritten Beanspruchung unterwerfen, so ist γ_4 mit α_0 zu verbinden, aus den Punkten γ_5 und γ_6 mit $\overline{\gamma_4 \alpha_0}$ parallele Linien zu ziehen und in den Schnittpunkten $\xi_1 \xi_2$ Ordinaten zu errichten, wodurch wir die entsprechenden Nf-Werthe erhalten.

Die äussere Kraft ist bei dieser dritten Beanspruchung folgende:

$$\Delta_4 \cdot \overline{\xi_0 n_0} = \overline{a_4 c_0},$$
$$\Delta_5 \cdot \overline{\xi_1 n_1} = \overline{a_5 c_1},$$
$$\Delta_6 \cdot \overline{\xi_2 n_2} = \overline{a_6 c_2} \text{ u. s. w.}$$

und die Arbeitsfläche $a_4 c_0 c_2 c_2 a_6$.

Aus den erhaltenen Diagrammen ist zu ersehen, dass bei zähen Materialien bei continuirlicher Beanspruchung zur gleichwerthigen Deformation (δ_6) eine Druckkraft vom Werthe $\overline{a_6 c_6}$ und bei Anwendung des Ausglühens nur eine von $\overline{a_6 c_2}$ nöthig war (Fig. 15, Taf. IV).

Nachdem $\overline{a_6 c_6} > \overline{a_6 c_2}$ ist und die Arbeitsfläche im ersten Falle auch grösser ist als im zweiten Falle, d. h.

$$a_0 c_0 c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 a_6 > a_0 c_0 c_1 c_2 b_0 b_1 b_2 c_0 c_1 c_2 a_6,$$

so folgt, dass bei Formänderungen durch Ausglühen immer günstigere Verhältnisse entstehen.

Wir wollen nun in unseren Untersuchungen weiter gehen.

Bei der Zugbeanspruchung haben wir gefunden, dass das Gesetz der proportionalen Widerstände nur bei kurzen Stäben unbedingt Anwendung finden kann. Untersuchen wir nun, in welchem Grade dieses Gesetz bei der Druckbeanspruchung anwendbar ist.

Nehmen wir zu diesem Zwecke

a) zwei Kreiscylinder in Betracht, die aus demselben Material bestehen. Es seien die anfänglichen Maasse des einen Δ'_0, δ'_0, die veränderten Δ'_1, δ'_1 und die des anderen Δ''_0, δ'_0, beziehungsweise Δ''_1, δ''_1. Ferner nehmen wir noch an, dass das Verhältniss der Höhe zum Durchmesser in folgender Formel ausgedrückt sei:

$$\delta > 0{\cdot}5\, D \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

In diesem Falle ist die Formel der Druckkraft

$$Q = \Delta \cdot Nf \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Demnach ist

$$\frac{Q'}{Q''} = \frac{\Delta'_1}{\Delta''_1} \cdot \frac{Nf'_1}{Nf''_1} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Um das Verhältniss klarer und fasslicher zu erhalten, wollen wir anstatt den veränderten den anfänglichen Querschnitt setzen.

Wir wissen, dass

$$\Delta'_0 \delta'_0 = \Delta'_1 \delta'_1,$$

also

$$\Delta' = \Delta'_0 \frac{\delta'_0}{\delta'_1},$$

da aber

$$\frac{D'^2_0 \pi}{4} \cdot \delta'_0 = \frac{D'^2_1 \pi}{4} \cdot \delta'_1$$

und

$$\frac{\delta'_0}{\delta'_1} = \left(\frac{D'_1}{D'_0}\right)^2 = \left[\frac{D'_0(1+\lambda'_1)}{D'_0}\right]^2 = (1+\lambda'_1)^2$$

ist, so folgt dass

$$\Delta_1 = \Delta'_0 (1+\lambda'_1)^2.$$

Dieses substituirt ergiebt sich:

$$\frac{Q'}{Q''} = \frac{\Delta'_0 Nf'_1 (1+\lambda'_1)^2}{\Delta''_0 Nf''_1 (1+\lambda''_1)^2}.$$

Aus dieser Formel kann man folgern, dass die Druckkraft mit der anfänglichen Druckfläche nur dann proportional, d. h.

$$\frac{Q'}{Q''} = \frac{\Delta'_0}{\Delta''_0}$$

ist, wenn

$$Nf'_1 (1+\lambda'_1)^2 = Nf''_1 (1+\lambda''_1)^2.$$

Diese Bedingung bedeutet aber die proportionale Formänderung, weil bei demselben Material nur dann $Nf'_1 = Nf''_1$ sein wird, wenn $\lambda'_1 = \lambda''_1$ ist. Wir können also sagen, dass in dem angenommenen Falle, d. h. wenn $\delta > 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg} \beta$ ist, bei Cylindern mit kreisförmigem Querschnitte die Druckkraft bei proportionalen Formänderungen mit der an-

fänglichen Druckfläche proportional ist und die Höhe des Cylinders die Druckkraft nicht beeinflusst.

Das Verhältniss wird noch einfacher, wenn man die anfänglichen Druckflächen gleich gross nimmt, d. h.

$$\Delta_0' = \Delta_0''.$$

In diesem Falle ist bei proportionaler Formänderung

$$\lambda_1' = \lambda_1''$$

$$Nf_1' = Nf_1'' \text{ ist } \frac{Q_1''}{Q_1'} = 1,$$

$$Q_1'' = Q_1',$$

d. h. bei Kreiscylindern von gleichem Durchmesser sind jene Druckkräfte, welche den proportionalen Formänderungen entsprechen, immer von gleichem Werthe und von der Höhe der Cylinder unabhängig.

b) Untersuchen wir nun das Verhältniss der Druckkräfte für den Fall, wenn $\delta < 0{\cdot}5 D \cdot \operatorname{tg}\beta$ ist, also wenn die Kraftformel $Q = \Delta \cdot Nf \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot Z$ ist.

In diesem Falle ist

$$\frac{Q'}{Q''} = \frac{\Delta_1' Nf_1' Z_1'}{\Delta_1'' Nf_1'' Z_1''}$$

und wenn wir hier den ursprünglichen Querschnitt einsetzen:

$$\frac{Q'}{Q''} = \frac{\Delta_0' \cdot Nf_1' \cdot (1+\lambda_1')^2}{\Delta_0'' \cdot Nf_1'' \cdot (1+\lambda_1'')^2} \cdot \frac{Z_1'}{Z_1''},$$

aus welcher Formel folgt, dass die Druckkraft mit der Oberfläche nur dann proportional ist, d. h.

$$\frac{Q'}{Q''} = \frac{\Delta_0'}{\Delta''},$$

wenn

$$Nf_1'(1+\lambda_1')^2 = Nf_1''(1+\lambda_1'')^2$$

und

$$Z_1' = Z_1'' \text{ ist.}$$

Nach dem weiter oben Erwähnten bedeutet die erste Bedingung die proportionale Formänderung, die zweite aber, da Z_1' mit Z_1'' nur dann gleich sein kann, wenn

$$\frac{D_1'}{\delta_1'} = \frac{D_1''}{\delta_1''}$$

ist, bedeutet die Proportionalität der cylindrischen Versuchsstücke.

Wir können also sagen, dass in dem Falle, wenn $\delta < 0{\cdot}5 D \cdot \operatorname{tg}\beta$ ist, die Druckkräfte nur bei proportionalen Körpern und nur bei proportionaler Formänderung ($\lambda' = \lambda''$) mit der Druckfläche proportional sind.

In diesem Falle gelangt also das proportionale Gesetz in seinem ganzen Umfange zur Geltung.

Bei zähen Körpern lässt sich auch die Ursache der Thime'schen Versuchsergebnisse einfach nachweisen.

Zu diesem Zwecke setzen wir voraus, dass auf die Seitenflächen des zu deformirenden Körpers eine mit der Schubwirkung ($p_n = q \cdot \operatorname{ctg} \beta$) der Druckkraft gleich grosse aber entgegengesetzte äussere Kraft wirke.

Dieser Voraussetzung genügen wir am einfachsten dadurch, dass wir die Seitenflächen des zu deformirenden Körpers vollständig umhüllen (Fig. 58, Taf. VI). Unter solchen Verhältnissen ist eine Formänderung so lange nicht möglich, bis die Schubwirkung der äusseren Kraft diese äussere Umhüllung nicht deformirt oder zerreisst. Wenn aber die Umhüllung eine Seite des Versuchsstückes frei lässt, so kann die Schubwirkung der Druckkraft ($p_n = q \cdot \operatorname{ctg} \beta$) auf dieser freien Seite ungestört einwirken, während den anderen Theilen, nachdem p_n gegenüber Widerstand wirkt, keine Verschiebung entstehen kann.

Eine solche partiale Umhüllung ergiebt sich auch dann, wenn der zu deformirende Theil mit einer grösseren Masse im Zusammenhange steht, wie es Fig. 59, Taf. VI ersichtlich macht. Bei diesen Körpern kann die äussere Kraft in dem Theile $c\,e\,d$ keine Wirkung ausüben, weil die Seite $c\,d$ nicht frei ist, während sie in dem Theile $a\,e\,b$ frei wirken kann, weshalb die Verschiebung der Moleküle, beziehungsweise die Wirkung der äusseren Kraft an der freien Seite zur Geltung kommt, und zwar von a bis b, d. h. bis zu jenem Punkte, in welchem die von dem Endpunkte des Werkzeuges C ausgezogene Schenkellinie des Winkels β die Grenzlinie schneidet, also ganz so wie dies Thime gefunden hat.

Wir müssen bemerken, dass die Bezeichnung Thime's bezüglich des Winkels β mit der Bezeichnung der Kraftvermittlung nur bei solchen Werkzeugen übereinstimmt, deren Schneidewinkel 90° ist, wie wir dies in Fig. 8, Taf. I sehen.

Wenn aber der Schneidewinkel kleiner ist als 90°, dann ist der Thime'sche Winkel β um den Ergänzungswinkel des Schneidewinkels grösser als der Winkel der Kraftvermittlung.

22. Material IV. Gruppe.

Zähes, jedoch unbildsames Material mit variablem f,
wobei $Nf_{\max} > p_0$ ist.

So lange die Schubwirkung der Druckkraft ($q \cdot \operatorname{ctg} \beta$) kleiner ist als der Werth der inneren Reibung, verbreitet sich zwar die Wirkung der äusseren Kraft über den ganzen Körper, ohne aber eine bleibende Verschiebung hervorzubringen. Sobald die Schubwirkung der äusseren Kraft grösser ist als die innere Reibung, überwindet diese jene Reibungsarbeit, welche wir Zähigkeit nannten. Unter dieser Wirkung werden die Körper, mit Ausnahme von langen Stäben, sich gleichmässig deformiren.

Die nöthige Druckkraft dieser Deformation kann nach der allgemeinen Formel

$$Q_1 = \Delta_1 \cdot Nf_1 \cdot \operatorname{tg} \beta \text{ für den Fall, wenn } \delta > 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg} \beta$$

ist, oder $Q_1 = \Delta_1 \cdot Nf_1 \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot Z_1$ wenn $\delta < 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg}\beta$ ist, so lange berechnet werden, bis die procentuale Maassvergrösserung (Dehnung) des deformirten Körpers nicht grösser ist als die Abscisse des Diagrammes der inneren Reibung, also bis $D_{\max} = D_o(1+\lambda_{\max})$ wird. In diesem Falle ist aber $Nf = p_0$, weil die äussere Kraft bei Zugbeanspruchung durch die Cohäsion vermittelt wird.

Bei Druckbeanspruchung kann diese Grenze nur in sehr geringem Maasse überschritten werden, da bei deren Ueberschreitung $Nf > p_0$ wird, weshalb der Körper nach Art der spröden Materialien in der Richtung des Wirkungswinkels zerspringt. Wenn man diese Materialien in grösserem Maasse deformiren will, so muss man sie ausglühen, d. h. neuerdings mit Zähigkeit versehen.

23. Material V. Gruppe.

Zähes und bildsames Material mit variablem f, wobei $Nf_{\max} < p_0$ ist.

So lange die Schubwirkung der Druckkraft ($p_n = q \cdot \operatorname{ctg}\beta$) kleiner ist als der Werth der inneren Reibung, entsteht nur die Elasticitätsarbeit, bei welcher die Wirkung der äusseren Kraft sich zwar auf den ganzen Körper erstreckt, jedoch keine bleibende Deformation hervorbringt. Sobald die Schubwirkung der äusseren Kraft grösser ist als der Werth der inneren Reibung, entsteht die gleichmässige Formänderung, d. h. jene, die der Zähigkeit entspricht, und diese dauert so lange, bis die innere Reibung nicht ihren Maximalwerth erreicht hat. Dann aber, nachdem Nf seinen maximalen Werth beibehält, und weil $Nf_{\max} < p_0$ ist, entstehen solche Verhältnisse wie bei den bildsamen Materialien, weshalb auch die der Bildsamkeit entsprechende Formänderung eintritt.

Bei diesen Materialien muss man also zweierlei Formänderung unterscheiden: die der Zähigkeit und jene der Bildsamkeit. Jene Druckkraft, die zur Hervorbringung der der Zähigkeit entsprechenden Formänderung benöthigt wird, kann man nach Punkt 21 mit Hilfe des Diagrammes der inneren Reibung bestimmen, indem man die veränderten Werthe des Querschnittes (Δ_1) mit dem entsprechenden Werthe von (Nf_1) multiplicirt; hingegen erhält man nach Punkt 19 den Werth der Druckkraft für die bildsame Formänderung dadurch, dass man die veränderten Werthe des Querschnittes immer mit derselben maximalen inneren Reibung ($Nf_{\max}$) multiplicirt.

Demnach ist die Druckkraft:

Im Falle	Bei Formänderung der Zähigkeit	Bei Formänderung der Bildsamkeit
$\delta > 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg}\beta$	$Q_1 = \Delta_1 \cdot Nf_1 \cdot \operatorname{tg}\beta$	$Q_1 = \Delta_1 \cdot Nf_{\max} \cdot \operatorname{tg}\beta$
$\delta < 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg}\beta$	$Q_1 = \Delta_1 \cdot Nf_1 \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot Z_1$	$Q_1 = \Delta_1 \cdot Nf_{\max} \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot Z_1$.

Die Druckkraft ist also bei demselben Material, im Falle $\delta > 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg} \beta$, bei proportionalen Formänderungen mit der Druckfläche proportional. Im Falle $\delta < 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg} \beta$, ist die Druckkraft nur bei proportionalen Körpern und proportionaler Formänderung mit der Druckfläche proportional.

24. Material VI. Gruppe.

Zähes Material mit variablem f, wobei $Nf_{\max} = p_0$ ist.

So lange die Schubwirkung der äusseren Druckkraft ($p_n = q \cdot \operatorname{ctg} \beta$) kleiner ist als die innere Reibung, entsteht Elasticitätsarbeit, bei welcher sich die Wirkung der äusseren Kraft zwar dem ganzen Körper mittheilt, ohne jedoch eine bleibende Formänderung hervorzubringen.

Sobald die Schubwirkung der äusseren Kraft grösser ist als der Werth der inneren Reibung, entsteht die Formänderung der Zähigkeit, unter deren Wirkung die Körper — mit Ausnahme von langen Stäben — sich gleichmässig deformiren. Diese gleichmässige Deformation dauert so lange, bis die innere Reibung nicht ihren Maximalwerth erreicht. Dann wird bei Anwendung langsamen Druckes, d. h. wenn die Beschleunigung der Moleküle gering ist, die Formänderung der Bildsamkeit eintreten, und zwar so lange, bis zufolge der inneren Reibungsarbeit das Material sich nicht erwärmt und $Nf_{\max} > p_0$ wird, wo dann das Versuchsstück Bruch erleidet.

25. Versuchs-Resultate.

Um sich über die Richtigkeit der Folgerungen aus der Druckbeanspruchung überzeugen zu können, habe ich mit denselben Materialien Druckversuche angestellt, mit welchen ich schon früher die Zugversuche gemacht hatte. (Siehe Punkt 16.)

Ich benützte hierzu denselben Apparat, welchen ich bei den Zugversuchen gebrauchte, nur änderte ich ihn so um, wie es Fig. 2 in Taf. V darstellt.

Bei den Zugversuchen habe ich diesen Apparat in horizontaler Lage benützt, bei den Druckversuchen aber in verticaler, weil in dieser Lage die genaue Einstellung des Probestückes einfacher war. Da man bei den Druckversuchen keine Marken benützen kann, musste ich auf andere Weise dafür sorgen, dass der Einfluss der Fehlerquellen des Apparates beseitigt werde. Ich erreichte dies dadurch, dass ich den Apparat leer, also ohne den zu deformirenden Körper, stärker beansprucht habe als später bei den Druckversuchen, wodurch ich die Elasticitätsarbeit des Apparates erhielt; dann habe ich nach jeder Druckbeanspruchung das Versuchsstück entlastet und neuerdings bis zur früheren Grenze beansprucht, wodurch ich im Diagramme die gemeinsame Elasticitätsarbeit des Apparates und des Probestückes erhielt.

Das Diagramm der jetzt beschriebenen wiederholten Beanspruchung ist in Fig. 5 und 6, Taf. VI sichtbar.

Bei der ersten Beanspruchung erhielten wir die Curve $a\,b$, bei der zweiten die Curve $e\,b$. Die Fläche $a\,b\,e$ bedeutet daher die Deformationsarbeit, die Fläche $e\,b\,c$ die gemeinsame Elasticitätsarbeit des Versuchsstückes und des Apparates.

Ich verglich dann die Curve der zweiten Beanspruchung mit jener, welche ich bei der Beanspruchung des leeren Apparates erhielt und fand, dass diese beiden vollständig identisch sind, woraus man folgern kann, dass die Elasticitätsarbeit der untersuchten Versuchsstücke (von 0·1 bis 0·2 ccm Rauminhalt) mit diesem Apparate nicht wahrnehmbar waren und dass die zweite Beanspruchung nur die Elasticitätsarbeit des Apparates ergiebt, weshalb deren Werth aus dem Diagramme der ersten Beanspruchung zu subtrahiren ist.

Um nun das richtige Druckdiagramm construiren zu können, muss man die anfängliche Höhe (δ_0) und den Durchmesser (D_0) des Versuchsstückes, als auch die nach der Deformation veränderte Höhe (δ_x) mittelst Abmessungen bestimmen. Aus diesen zwei Maassen lässt sich die Höhendifferenz ($\delta_0 - \delta_x$), d. h. der Weg der äusseren Druckkraft berechnen, welcher Werth mit der Länge $\overline{a\,c}$ des Diagrammes Fig. 5, Taf. IV gleich sein soll. Beim Vergleichen fand ich, dass in solchen Fällen, wo Versuchsfehler das Resultat nicht beeinträchtigten, die zwei Werthe nur in hundertstel Millimetern voneinander abwichen, was man als Messungsfehler betrachten kann. Den festgestellten Weg der Druckkraft ($\overline{a\,c}$) nahm ich als Abscisse des neuen Druckdiagrammes, also (in Fig. 6, Taf. IV) $\overline{a_1\,e_1}$, dann errichtete ich in e_1 die Senkrechte $\overline{e_1\,b_1}$ und zog mit der Abscissenachse ein System paralleler Linien, welches das alte und neue Diagramm in gleiche Theile theilt. Nachdem in das neue Diagramm nur jene Werthe aufzunehmen sind, welche entstehen, wenn man aus dem Diagramme der ersten Beanspruchung jenes der zweiten subtrahirt, so trug ich jene Längen der Parallelen, welche sich in Fig. 5 zwischen den zwei Curven befinden, in Fig. 6, von der Senkrechten $b_1\,e_1$ ausgehend, auf; also aus dem Schnittpunkte f_1 auf dieselbe Horizontale die Länge $f\,g$, als $f_1\,g_1$ u. s. w. Die Verbindung der auf diese Art erhaltenen Punkte ergiebt die Curve ($a_1\,b_1$) des richtigen Druckdiagrammes.

Die Versuche habe ich bei sämmtlichen Materialien mit je zwei cylindrischen Bolzen von gleichem Durchmesser und drei verschiedenen Höhen gemacht, so dass also den Versuchsergebnissen eines jeden Materials je sechs Versuche zu Grunde liegen.

Die erhaltenen Druckdiagramme der gleich hohen Bolzen prüfte ich in durchfallendem Lichte auf ihre vorauszusehende Congruenz und fand, dass mit Ausnahme jener Fälle, wo sich Versuchsfehler einschlichen, diese sich vollkommen deckten.

Eines dieser congruenten Diagramme habe ich als Grundlage der Berechnungen benützt.

Die Berechnungen liessen sich rasch und leicht durchführen, da die Durchmesser der Bolzen gleich gross waren, weshalb (nach Punkt 21 Seite 54) die Werthe der veränderten Durchmesser und der Druckflächen nur einmal berechnet werden mussten. Ich berechnete zuerst die durch Druck um 5%, 10%, 15%, 20% vergrösserten Durchmesser, d. h. D_0, $D_1 = 1{\cdot}05 \cdot D_0$, $D_2 = 1{\cdot}10 \cdot D_0$, $D_3 = 1{\cdot}15 \cdot D_0$, dann die entsprechenden Querschnitte Δ_1, Δ_2 u. s. w. und endlich aus der Unveränderlichkeit des Volumens die entsprechenden Höhen δ_1, δ_2 . . . u. s. w.

Aus den Werthen der Höhe (δ_0, δ_1, δ_2) wurde der Weg der äusseren Kraft $(\delta_0 - \delta_1)$, $(\delta_0 - \delta_2)$ u. s. w. berechnet und diese Werthe vom Anfangspunkte des Diagrammes ausgehend in demselben Maassstabe aufgetragen, in welchem der Apparat die äussere Kraft gezeichnet hat. Die Ordinaten dieser Schnittpunkte geben die entsprechenden Werthe der äusseren Kraft.

Die berechneten Werthe von D und Δ wurden nach einem frei gewählten Maassstabe als Ordinaten in den entsprechenden Abscissen $(\delta_0 - \delta_x)$ aufgetragen, wodurch wir die in Fig. 4, 5 und 6 der Taf. VII—XIX ersichtlichen Curven Δ und D gewonnen.

Zu den Berechnungen ist auch die Kenntniss des Winkels β erforderlich. Dieser lässt sich aus dem Druckdiagramm sehr einfach bestimmen, wenn man von jenen Fällen ausgeht, wo $\delta > 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg} \beta$ ist.

Es ist nämlich in diesem Falle:

$$Q_1 = \Delta_1 \cdot Nf_1 \cdot \operatorname{tg} \beta_1,$$

hieraus also

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{Q_1}{\Delta_1} \cdot Nf_1.$$

In dieser Formel ist $\operatorname{tg} \beta$ durch bekannte Grössen ausgedrückt und in jedem Stadium der Formänderung berechenbar. Zweckmässig ist es, den Winkel β nicht aus den anfänglichen Verhältnissen, sondern aus einem später zum Vorschein kommenden zu berechnen, z. B. wenn $D_1 = 1{\cdot}15 \cdot D_0$ bis $1{\cdot}2 \cdot D_0$ ist.

Ausser dem Winkel β musste auch der in Z vorkommende Werth y bestimmt werden. Wenn $\angle \beta$ bekannt ist, kann dieser, falls $\delta < 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg} \beta$ ist, berechnet werden, da in diesem Falle

$$Q_1 = \Delta_1 \cdot Nf_1 \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot Z_1$$

ist und so

$$Z_1 = \frac{Q_1}{\Delta_1 \cdot Nf_1 \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

Wenn nun der Werth von Z und $n = \frac{D}{\delta \cdot \operatorname{tg} \beta}$ bekannt ist, so kann der Werth von y durch Interpolation bestimmt werden.

Auf diese Weise wurden für jedes untersuchte Metall die Werthe von $\angle \beta$ und y und mit Zuhilfenahme derselben das Druckdiagramm berechnet und construirt. Die auf diese Art erhaltenen Punkte sind in den Fig. 4, 5, 6 der Taf. VII—XIX mit kleinen Kreisen markirt, und das Versuchsdiagramm (Q) mit einer vollen Linie bezeichnet.

Bezüglich der untersuchten Metalle ist Folgendes zu bemerken.

a) Blei gehört in die V. Gruppe, weshalb wir bis zu jenem Werthe von $N \cdot f_{max}$, welcher durch Zugbeanspruchung bestimmt wurde, die gleichmässige, d. h. die der Zähigkeit entsprechende, dann aber mit constantem $N \cdot f_{max}$ die der Bildsamkeit entsprechende Formänderung berechnet haben. Bei der Berechnung ergab sich bei dem Werthe von $N \cdot f_{max} = 2{\cdot}05$, für $\angle \beta = 58^0$ und für $y = 0{\cdot}55$. Die Rechnungsresultate sind in der zur Taf. VII mitgedruckten Tabelle, die Versuchsresultate in Fig. 4 und 5, Taf. VII mitgetheilt. Die berechneten Punkte des 11·94 mm hohen Bolzens, wie aus Fig. 4, Taf. VII ersichtlich ist, fallen ganz gut mit dem Versuchsdiagramm zusammen, während die des 6 mm hohen Bolzens, wie aus Fig. 6 ersichtlich ist, anfangs abweichen, später aber mit diesen übereinstimmen. Die Abweichung hat ihre Ursache grösstentheils darin, dass die Formänderung des Bleies sehr unregelmässig ist (aus dem kreisförmigen Querschnitte entstand ein unregelmässiger elliptischer Querschnitt), beziehungsweise dass es unseren Bedingungen nicht vollkommen entspricht.

b) Zinn gehört auch in die V. Gruppe. Bei diesem wurde bis zum Werthe von $N \cdot f_{max} = 2{\cdot}17$, welcher durch Zugbeanspruchung bestimmt ist, die gleichmässige, dann mit Beibehaltung des Werthes von $N \cdot f_{max}$ die bildsame Formänderung berechnet. Nach den Berechnungen ergab sich bei $N \cdot f_{max} = 2{\cdot}17$, dass $\angle \beta = 61^0$ und $y = 0{\cdot}55$ ist; die Rechnungsresultate über Zinn sind als Anhangstabelle auf Taf. VIII zusammengefasst, während die Versuchsresultate auf Taf. VIII graphisch dargestellt sind. Die berechneten Werthe von Q, denen diese Constanten als Grundlage dienen, stimmen mit den Versuchswerthen der Fig. 4 sehr gut überein, mit den Versuchswerthen der Fig. 5 aber nicht und sind im letzteren Falle die berechneten Werthe kleiner als die Versuchswerthe, weshalb man annehmen kann, dass dieses Material ungleich ist und dass in einzelnen Fällen $N \cdot f_{max} > 2{\cdot}17$ ist.

Die Richtigkeit dieser Voraussetzung wurde durch die späteren Scheer- und Lochversuche bestätigt.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass das Zinn sich regelmässig deformirte.

c) Aluminium gehört wie bekannt auch in die V. Materialgruppe, deshalb wurde bis zu dem durch Zugbeanspruchung gewonnenen Werthe von $N \cdot f_{max} = 10{\cdot}58$ die gleichmässige, darüber hinaus bei constantem $N \cdot f_{max}$ die bildsame Formänderung berechnet. Nach den Berechnungen ergab sich bei $N \cdot f_{max} = 10{\cdot}58$, dass $\angle \beta = 54^0$ und $y = 1$ sei.

Der Werth für y ist sehr abweichend von den Werthen der übrigen untersuchten Metalle, da bei allen diesen $y = 0{\cdot}55$ ist. Sowohl die Rechnungsresultate als auch die graphischen Versuchsresultate sind auf Taf. IX zu finden. Die Rechnungsresultate stimmen mit den Versuchswerthen, wie es Fig. 3 und 4 zeigt, sehr gut überein.

d) Kupfer, welches in verschiedenen Dicken untersucht wurde, ergab nicht nur beim Zuge, sondern auch beim Drucke vollkommen gleiche Resultate. Die untersuchten drei Kupferplatten waren also aus demselben Material erzeugt, mit welcher Bedingung sie zu diesem Zwecke auch bestellt waren. Bei allen Versuchen mit Kupfer wurde nach den Zugbeanspruchungen $N \cdot f_{max} = 26{\cdot}3$ angenommen. Bis zu dieser Grenze berechnete ich die gleichmässige, darüber die bildsame Deformation. Nach den Berechnungen ergab sich bei $N \cdot f_{max} = 26{\cdot}3$, dass $\angle \beta = 54^0\ 30'$ und $y = 0{\cdot}55$ ist.

Die Diagramme hiervon sind in den Fig. 3, 4, 5 der Taf. X, XI und XII, die Rechnungsresultate auf jenen Tabellen ersichtlich, welche auf diesen Tafeln mitgedruckt sind. Die Versuchsdiagramme sind hier, sowie überhaupt auf allen Tafeln mit voller Linie, die berechneten Werthe von Q mit kleinen Kreisen dargestellt. Aus den Fig. 3, 4, 5 auf Taf. X, XI und XII ist ersichtlich, dass die Versuchs- und Rechnungsresultate sehr schön übereinstimmen, was als eine Folge der Gleichförmigkeit des Versuchsmaterials anzusehen ist. Dasselbe beweisen auch, wie wir später sehen werden, die Scheer- und Lochversuche.

e) Prima-Kesselblech gehört in die V. Materialgruppe, deshalb wurde bei diesem bis zu dem beim Zuge gewonnenen Werthe von $N \cdot f_{max} = 36$ die gleichmässige, darüber hinaus die bildsame Formänderung berechnet. Bei den Berechnungen ergab sich, wenn $N \cdot f_{max} = 36$ ist, dass $\angle \beta = 56^0\ 30'$ und $y = 0{\cdot}55$ ist.

Die Diagramme sind in den Fig. 4, 5, 6 der Taf. XIII dargestellt; die Rechnungsresultate aber wieder in der dieser Tafel beigelegten Tabelle zusammengefasst. Auf der genannten Tafel ist auch das Resultat der chemischen Analyse und das mikroskopische Bild dieses Materials bei 130facher Vergrösserung zu sehen, woraus man folgern kann, dass dieses Material ein gleichmässiges, weiches Schmiedeeisen mit grossem Karbidgehalte ist. Nach Fig. 4 und 6 stimmen die berechneten Werthe mit den Versuchswerthen überein; nach Fig. 5 aber könnte $N \cdot f_{max}$ einen etwas kleineren Werth haben. Die Ungleichheit dieses Materials ist auch beim Scheeren und Lochen desselben bemerkbar.

f) Secunda-Kesselblech gehört auch in die V. Materialgruppe, weshalb wir vollständig so verfuhren wie bisher, d. h. wir nahmen jenen Werth von $N \cdot f_{max}$ an, welchen wir bei Zugbeanspruchung erhielten und berechneten mit Hilfe dessen die gleichmässige und die bildsame Formänderung. Aus den Berechnungen ergab sich, wenn $N \cdot f_{max} = 39{\cdot}7$ ist, dass $\angle \beta = 54^0$ und $y = 0{\cdot}55$ ist.

Die Diagramme sehen wir in den Fig. 4, 5, 6 der Taf. XIV und die Rechnungsresultate in der beigelegten Tabelle zusammengestellt. Auf der genannten Tafel ist auch abermals die chemische Analyse und das mikroskopische Bild bei 130facher Vergrösserung zu sehen, woraus man folgern kann, dass dieses Material mehr Härtungskohle enthält, also härter ist als das Prima-Kesselblech, was übrigens auch der grössere Werth von $N \cdot f_{max}$ zeigt. Bei diesen Werthen (nach Fig. 4 und 5) stimmen die Berechnungen mit den Versuchsresultaten vollkommen überein; nach Fig. 6 aber würde ein etwas kleinerer Werth von $N \cdot f_{max}$ entsprechen. Die Ungleichheit des Materials als Ursache dieser Erscheinung, kommt auch beim Lochen und Scheeren wieder zur Geltung.

Aus den zahlreichen Versuchen, die wir unter a) b) c) d) e) f) angeführt haben, ist man berechtigt anzunehmen:

1. dass in jenen Fällen, wo bei der Zugbeanspruchung Contraction auftritt, $N \cdot f$ bei fortgesetzter Beanspruchung bis zu einem gewissen Grade einen wachsenden Werth erhält, dann aber constant bleibt und dass die Contraction ein Ergebniss jener Bildsamkeit sei, welche bei constantem $N \cdot f_{max}$ auftritt;
2. dass die innere Reibung, bei derselben relativen Lage der Moleküle von der Beanspruchungsart unabhängig, immer denselben Werth erhält;
3. dass die auf Grund der inneren Reibung abgeleitete Formel der Druckkraft richtig ist.

Wir wollen nun auf eine andere Gruppe von Materialien übergehen und die bei Druckbeanspruchung sich hier ergebenden Ergebnisse bestimmen.

g) Messing, welches in drei verschiedenen Dicken untersucht wurde und zwar in Platten von 18, 15 und 11 mm Stärke, gehört nach den Resultaten der Zugbeanspruchung in die IV. oder VI. Gruppe, weshalb bei diesen der Vorgang folgender ist.

Aus dem bekannten Theile des Diagrammes der inneren Reibung bestimmt man mit Hilfe eines Druckdiagrammes die Werthe von $\angle \beta$ und y und ergänzt dann mittelst dieser Werthe — jedoch von dem Druckdiagramm beziehungsweise aus der Formel

$$N \cdot f_1 = \frac{Q_1}{\Delta_1 \operatorname{tg} \beta} \quad \text{oder} \quad N \cdot f_1 = \frac{Q_1}{\Delta_1 \cdot Z_1 \operatorname{tg} \beta_1}$$

ausgehend — das Diagramm der inneren Reibung. So vorgehend ergiebt sich bei Messing, dass $N \cdot f$ noch eine kurze Zeit hindurch wächst, dann aber constant bleibt (siehe Taf. XV—XVII), weshalb dieses Material, obwohl es beim Zuge nicht contrahirt, in die VI. Gruppe eingereiht werden muss. Zu bemerken ist hier aber, dass die bildsame Formänderung nur beim langsamen Drucke auftritt.

Charakteristisch für Messing ist, dass so lange $N \cdot f$ seinen Maximalwerth nicht erreicht, das Reibungsdiagramm, vom Anfangstheile desselben abgesehen, nahezu eine gerade Linie bildet und dass $N \cdot f$ bei Druckbeanspruchung einen grösseren Werth erreicht als beim Zuge.

Die Ursache dieser letzten Erscheinung liegt wahrscheinlich im Einflusse der krystallförmigen Construction des Zinkes, welches sich ebenfalls auf diese Art verhält.

Nach dem Gesagten vorgehend, ergab sich bei der 18 mm starken Messingplatte für $N \cdot f_{max} = 29$: $\angle \beta = 59^0$ und $y = 0{\cdot}55$.

Diese charakteristischen Werthe wurden aus dem in Fig. 5, Taf. XV ersichtlichen Druckdiagramme berechnet und mit Hilfe dieser die entsprechenden Werthe für jene Druckversuche bestimmt, welche in Fig. 4 und 6 derselben Tafel gezeichnet sind, die wie ersichtlich gut übereinstimmen.

Bei der 15 mm starken Platte ergab sich auf ähnliche Weise für $N \cdot f_{max} = 51$: $\angle \beta = 48^0$ und $y = 0{\cdot}55$ und bei der 12 mm starken für $N \cdot f_{max} = 58{\cdot}5$: $\angle \beta = 48^0$ und $y = 0{\cdot}55$.

Diese drei Platten ergeben also verschiedene Resultate, obzwar sie aus demselben Material bestellt waren. Messing erleidet aber durch das öftere Ausglühen in seiner chemischen Zusammensetzung und durch das Walzen in seinem Gefüge eine Aenderung, wie dies aus den in Taf. XV, XVI und XVII mitgetheilten chemischen Analysen und den beigelegten mikroskopischen Abbildungen ersichtlich ist.

Das Material dieser drei Platten ist also nicht als dasselbe zu betrachten. Die Versuchsdiagramme und Berechnungen der 15 mm starken Messingplatten sind auf Taf. XVI zusammengestellt. Aus Fig. 5 wurden die weiteren Werthe des $N \cdot f$ mit Beibehaltung der geradlinigen Form bestimmt und mit Hilfe dieser die Werthe jener Versuche berechnet, welche in Fig. 4 und 6 dargestellt sind. Aus diesen Figuren kann man bemerken, dass die Rechnungsresultate mit den Versuchsresultaten nicht vollkommen übereinstimmen. Das Material ist also nicht ganz homogen, die Werthe von $N \cdot f_{max}$ schwanken, was, wie wir später sehen werden, auch aus den Scheerversuchen wahrnehmbar ist.

Die Versuchsdiagramme und Berechnungen der 12 mm starken Messingplatte sind auf Taf. XVII zusammengestellt. Als Grundlage der Berechnung diente das Druckdiagramm der Fig. 6. Die Rechnungswerthe stimmen in Fig. 5 mit den Versuchswerthen überein, in Fig. 4 aber wäre für $N \cdot f$ ein kleinerer Werth nöthig, was auf die Ungleichheit des Materials hinweist.

h) Deltametall gehört nach der Zugbeanspruchung am wahrscheinlichsten in die VI. Gruppe, welche Voraussetzung auch die Druckversuche bestätigen. Bei diesem Material muss man also vom Druckdiagramme ausgehend die Aenderung von $N \cdot f$ bestimmen. So vorgehend findet man, dass $N \cdot f$ seinen Maximalwerth beim Zuge früher erreicht hat, als der Stab

zerrissen wurde. Es ergiebt sich nämlich, dass $Nf_{max} = 50$ $\angle \beta = 54^0$ und $Y = 0{\cdot}55$ ist.

Die Berechnungen dieser Werthe wurden mit Hilfe jenes Versuches durchgeführt, dessen Diagramm Fig. 4 auf Taf. XVIII darstellt. Die Rechnungsresultate stimmen mit den Versuchsdaten, wie es Fig. 5 und 6, Taf. XVIII ersichtlich macht, nicht vollkommen überein. Dieses Material hat also ebenso Ungleichheiten wie alle jene, welche Zink enthalten.

In Fig. 5 ist ein Fall gekennzeichnet, bei welchem das schon deformirte Material nach dem Ausglühen einer weiteren Deformation unterworfen wurde. Diese Figur beweist, dass durch Ausglühen wieder die ursprünglichen Werthe der inneren Reibung zur Geltung gelangen, dass also bei demselben Material die innere Reibung nur von der relativen Lage der Moleküle abhängt.

i) Zink erwies sich beim Zuge als sprödes, beim Drucke aber als Material der IV. Gruppe. Auch bei diesem muss man den Werth der inneren Reibung aus dem Druckdiagramme bestimmen. Auf diese Weise finden wir, dass dessen Diagramm die Gestalt der Fig. 2 auf Taf. XIX besitzt, wovon aber nur der aufsteigende Theil in Betracht gezogen werden kann, weil bei dem übrigen das Material theilweise schon zersprungen war.

k) Graues Roheisen ist beim Zuge spröde, beim Druck verhält es sich wie Zink, so dass es in Bezug auf Druck in die IV. Gruppe gehört.

Die Curve des Diagrammes der inneren Reibung ist nach Fig. 1 der Taf. XIX theilweise auch horizontal. Dieser Theil kann jedoch nicht mehr in Betracht gezogen werden, da die Versuchskörper in jenem Momente, wo die Horizontale der Diagrammcurve beginnt, schon nicht mehr intact waren. Auf der Taf. XIX ist auch das mikroskopische Bild des grauen Roheisens dargestellt, woraus ersichtlich, dass es sehr weich ist und viel Karbid, Graphit und Temperkohle und nur wenig Härtungskohle enthält.

Zink und graues Roheisen gehören in Folge ihres schon weiter oben erwähnten Verhaltens in die Gruppe der Materialien mit combinirtem Reibungscoëfficienten.

IV. Beanspruchung zweiten Grades.

A. Scheeren.

Um in die Verhältnisse des Scheerens einen klaren Einblick zu erlangen, werden wir uns zuerst mit dem einfachsten Falle desselben befassen und hernach von diesem ausgehend successive auf die zusammengesetzteren Fälle übergehen. Die einfachste Art des Scheerens ist die mit parallelen Schneiden und mit rechtwinkligem Schneidewinkel.

26. Scheere mit parallelen Schneiden ($\angle \varphi = 0$) und rechtwinkligem Schneidewinkel ($\angle \alpha = 90^0$).

Der einfachste Fall des Scheerens tritt dann auf, wenn man die Verhältnisse so wählt, wie sie in Fig. 1a und 1b, Taf. XX dargestellt sind, d. h. wenn man auf einen plattenförmigen Körper (T) eine solche Scheere einwirken lässt, deren Schneiden A und B zur Platte und zu einander parallel sind und deren Schneidewinkel $\alpha = 90^0$ beträgt. Wenn ein solches Werkzeug nahezu am Rande des zu schneidenden Körpers wirkt, wie es Fig. 2, Taf. XX zeigt, entsteht am freien Ende eine einfache Druckwirkung, bei welcher jener Theil des Körpers Formänderung erleidet, welcher oberhalb derjenigen Wirkungsfläche liegt, die man vom Anfangspunkte (a) des Werkzeuges unter dem Winkel β zieht, also in Fig. 2 der Theil acg. Die einfache Druckwirkung entsteht auch dann noch, wenn das Werkzeug auf ein Stück von der Breite $ag = \delta \cdot \operatorname{ctg} \beta$ einwirkt (siehe Fig. 3), denn auch in diesem Falle deformirt sich der Theil acg, weshalb auf der Fläche cg Stauchung auftritt. Aus der Fig. 3 ist auch ersichtlich, dass in dem angenommenen Falle die ganze Endfläche (cg) gleichmässig beansprucht wird, und da diese Endfläche mit dem Querschnitte gleich gross ist, so können wir sagen, dass die äussere Kraft nur auf einen $\delta \cdot \operatorname{ctg} \beta$ breiten Streifen einzuwirken braucht, um den ganzen Querschnitt gleichmässig zu beanspruchen.

Wenn das Werkzeug auf weiter nach innen zu liegende, aber mindestens $\delta \cdot \operatorname{ctg} \beta$ breite Theile einwirkt, wie in Fig. 4—7 (Taf. XX), dann werden die Flächen cg und ek von den benachbarten Theilen in der Deformation gehemmt. Es kann also keine einfache Druckwirkung mehr auftreten, sondern die Kräfte verursachen secundäre Wirkungen. Hierzu ist aber unbedingt nothwendig, dass die äussere Kraft auf $\delta \cdot \operatorname{ctg} \beta$ breite Streifen einwirke, sonst würde der Querschnitt nicht gleichmässig beansprucht sein und würde dann auch keine gleichmässige secundäre Beanspruchung auftreten können.

Um die secundären Wirkungen der äusseren Kräfte zu versinnlichen, zeichnen wir uns das Molekularnetz auf (Fig. 4, Taf. XX), bezeichnen darin die Druckwirkung des Werkzeuges A aus den Molekülen des Stückes $ag = \delta \cdot \operatorname{ctg} \beta$ und die des Werkzeuges B aus den Molekülen des Stückes $bk = \delta \cdot \operatorname{ctg} \beta$ und zwar in beiden Richtungen der Kraftvermittlung. Aus dieser Figur ist ersichtlich, dass auf das Stück $acbe$ nur solche Komponenten wirken, die sich im Gleichgewichte befinden, folglich die äussere Kraft auf diesen Theil keine primäre Wirkung ausübt.

Aus der Figur geht weiter hervor, dass sämmtliche nicht in Gleichgewicht stehende, also wirkungsfähigen Komponenten, welche auf den Theil $agfc$ einwirken, in der Richtung des Winkelschenkels gf des $\angle \beta$ nach **links** und jene, welche auf den Theil $behk$ einwirken, sich nach

rechts fortpflanzen. Die Resultanten dieser Komponenten wollen wir in Fig. 5 mit X_1 und X_2 bezeichnen.

Da die Moleküle sich in der Richtung der Resultanten nicht bewegen können, so zerlegen wir diese in zwei Komponenten und zwar in eine in die Richtung der Bewegung des Werkzeuges fallende (J) und in eine hierauf senkrechte (H) (Fig. 5). Durch Einwirkung der Komponenten J_1 und J_2 nehmen die Theile $a\,c\,f\,g$ und $b\,e\,h\,k$ die Bewegung des sie berührenden Werkzeuges an.

Wenn sich das Werkzeug fortbewegt hat, tritt die in der Fig. 6 dargestellte Lage ein, d. h. der Anfangspunkt des Werkzeuges A, der früher in a war, kommt nun nach a_1 und der Anfangspunkt des Werkzeuges B, der früher in b war, nach b_1 und wird aus der geraden Linie $\overline{a\,e}$ die krumme Linie $\widehat{a_1 e}$, aus $\overline{b\,c}$ die Linie $\widehat{b_1 c}$. Nachdem $\widehat{a_1 e} > \overline{a\,e}$ und $\widehat{b_1 c} > \overline{b\,c}$ ist, so folgt, dass der Theil $a\,c\,b\,e$ in der Richtung der Komponenten H_1 und H_2 Vergrösserung erlitt, mit anderen Worten, dass dieser Theil durch die secundäre Wirkung der äusseren Kraft, welche hier Zugwirkung verursacht, deformirt wurde.

Zur übersichtlicheren Bezeichnung der verschiedenen Beanspruchungen werden wir der Fig. 7 entsprechend die gezogenen Theile des Körpers horizontal, die am Werkzeuge festgehaltenen Theile aber vertikal schraffiren.

Die secundäre Wirkung der äusseren Kraft bewirkt die Formänderung des Theiles $a\,c\,b\,e$, welcher durch die Zugbeanspruchung in der Richtung $a\,b$ Maassverminderung erleidet. Da nun $a\,b = \delta$ die Dicke der Platte ist, so ist, wenn b die Länge des Schnittes (die Breite der Platte) bedeutet, $\delta \times b = \overline{a\,b} \times b$ die Scheerfläche; durch die Formänderung des Theiles $a\,c\,b\,e$ wird, wie aus Fig. 6 ersichtlich, auch die Scheerfläche vermindert. Wir wissen nun, dass die Verminderung des Querschnittes, beziehungsweise die Vergrösserung der Länge bei Zugbeanspruchung von der gleichmässigen Dehnung (λ) und von ($\varkappa$), dem Grade der Bildsamkeit, abhängt. Ferner wissen wir, dass bei Materialien mit veränderlichem Reibungscoëfficienten der Werth von Nf bei gleichmässiger Dehnung (λ) wächst und bei Bildsamkeit constant bleibt. Wenn wir nun jene Scheerfläche suchen, bei welcher $Nf_{\max}$ auftritt, so können wir dies aus der Beständigkeit des Volumens und aus der Zugbeanspruchung folgendermassen bestimmen. Wir wissen, dass

$$\Delta \cdot h = \Delta_1 \cdot h_1 \text{ und } h_1 = h + h\lambda$$

ist, also

$$\Delta \cdot h = \Delta_1 \cdot h(1 + \lambda)$$

$$\Delta = \Delta_1 (1 + \lambda),$$

folglich

$$\Delta_1 = \frac{\Delta}{1 + \lambda} \text{ wird.}$$

In unserem jetzigen Falle ist aber $\Delta = \delta \cdot b$ und $\Delta_1 = \delta_1 \cdot b_1$. Die veränderte Scheerfläche ist daher

$$\delta_1 \cdot b_1 = \frac{\delta \cdot b}{1 + \lambda}.$$

Wenn wir nun die Scheerkraft bestimmen wollen, müssen wir in Betracht nehmen, dass beim Scheeren die primäre Wirkung der äusseren Kraft Druck ist, beziehungsweise, dass die Zugkraft nur als secundäre Wirkung auftritt, weshalb bei der Bestimmung des Kraftbedarfes die primäre Wirkung, d. h. die Druckwirkung berücksichtigt werden muss.

Die Formel der Druckkraft am Ende der gleichmässigen Dehnung ist

$$Q = \Delta_1 \cdot N f_{\max} \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Diese Kraft würde bei regelmässiger Druckbeanspruchung, wie es Fig. 8 zeigt, einen Bruch in der Richtung $\overline{a\,c} = \frac{\delta_1}{\sin \beta}$ hervorrufen und würde nun in diesem Falle die Bruchfläche, in welcher die Moleküle übereinander verschoben werden, durch das Product $\overline{a\,c} \times b_1$ ausgedrückt sein, wenn b_1 die veränderte Breite des Körpers bezeichnet. Nachdem aber $a\,c = \frac{\delta_1}{\sin \beta}$, so wird die Bruch-, beziehungsweise die Scheerfläche der Druckkraft $= \frac{\delta_1 \cdot b_1}{\sin \beta}$ sein. Nach Fig. 3 ist aber beim Scheeren die Scheerfläche nur $\delta_1 \cdot b_1$, und nachdem die Grösse der äusseren Kraft mit der Scheerfläche proportional ist, so folgt hieraus, dass die Scheerkraft sich zur Druckkraft so verhält, wie die Scheerfläche zur Bruchfläche, also:

$$Q_{\text{Scheer}} : Q_{\text{Druck}} = \delta_1 \cdot b_1 : \frac{\delta_1 \cdot b_1}{\sin \beta} = 1 : \frac{1}{\sin \beta},$$

woraus

$$Q_{\text{Scheer}} = Q_{\text{Druck}} \cdot \sin \beta \text{ und da } Q_{\text{Druck}} = \Delta_1 \cdot N f_{\max} \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

so ist die Scheerkraft, wenn Q_{Scheer} einfach mit Q bezeichnet wird,

$$Q = \Delta_1 \cdot N f_{\max} \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \beta.$$

In dieser Formel bedeutet Δ_1 die veränderte Druckfläche, die man mit Hilfe der Fig. 7 (Taf. XX) folgendermassen schreiben kann:

$$\Delta_1 = a\,g \times b_1 \text{ und } a\,g = \delta_1 \cdot \operatorname{ctg} \beta, \text{ also } \Delta_1 = \delta_1 \cdot b_1 \cdot \operatorname{ctg} \beta.$$

Dieses in die Formel Q substituirt, ergiebt sich

$$Q = \delta_1 \cdot b_1 \cdot N f_{\max} \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot \sin \beta$$

oder nachdem $\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \beta = 1$

$$Q = \delta_1 \cdot b_1 \cdot N f_{\max} \cdot \sin \beta.$$

Aus der Zugbeanspruchung folgt, dass der Werth $\delta_1 \cdot b_1 = \frac{\delta \cdot b}{1 + \lambda}$ ist, dieses substituirt, wird die endgiltige Formel der Scheerkraft

$$Q = \frac{\delta \cdot b}{1 + \lambda} \cdot N f_{\max} \cdot \sin \beta \quad \text{sein.}$$

Mit Hilfe dieser Formel lässt sich das Verhältniss zwischen der äusseren Kraft und den Körperdimensionen bestimmen.

Zu diesem Zwecke setzen wir voraus, dass wir verschieden grosse Platten aus demselben Material scheeren.

In diesen Fällen ist $Nf_{\max}$ und $\angle \beta$ immer von gleichem Werthe.

Es folgt also hieraus, dass

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\delta_1 \cdot b_1}{\delta_2 \cdot b_2}$$

oder

$$\frac{Q_1}{\delta_1 \cdot b_1} = \frac{Q_2}{\delta_2 \cdot b_2},$$

d. h., dass die auf die Flächeneinheit fallende Scheerkraft, die Scheerfestigkeit, constant ist.

Bei proportionalen Körpern ist $\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{b_1}{b_2}$ daher, wenn wir dieses in der obigen Formel substituiren:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\delta_1^2}{\delta_2^2}$$

oder

$$\frac{Q_1}{\delta_1^2} = \frac{Q_2}{\delta_2^2}.$$

Es ist demnach bei proportionalen Körpern die Scheerkraft, bezogen auf das Quadrat der Dicke, constant, wie dies auch Kick schon gezeigt hat.

Wählen wir abermals einen speciellen Fall des Scheerens zur Untersuchung.

Setzen wir voraus, dass wir verschiedene Materialien von gleichen Dimensionen scheeren. Es wird hier das Verhältniss der Scheerkräfte:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\delta \cdot b \cdot \frac{Nf_{1\max}}{1+\lambda_1} \cdot \sin \beta_1}{\frac{Nf_{2\max}}{(1+\lambda_2)} \cdot \sin \beta_2} = \frac{Nf_{1\max} \cdot \frac{1}{1+\lambda_1} \cdot \sin \beta_1}{Nf_{2\max} \cdot \frac{1}{1+\lambda_2} \cdot \sin \beta_2} \text{ sein.}$$

Die Scheerkräfte sind also nicht nur von der maximalen Härte ($Nf_{\max}$) der Materialien, sondern auch vom Werthe der gleichmässigen Dehnung und von der Grösse des Wirkungswinkels abhängig.

Man kann also die auf den ursprünglichen Querschnitt bezogene Scheerkraft, d. h. die Scheerfestigkeit eines zähen Materials, durch Beanspruchung (durch Verkleinerung von λ) steigern.

Bei Materialien mit gleichwerthigem λ, da der Winkel β nur innerhalb enger Grenzen schwankt, ist die Scheerfestigkeit mit der maximalen Reibung, d. h. mit der Härte nahezu proportional.

Demzufolge hat das Gesetz Kick's, nach welchem die Scheerfestigkeit die Härte kennzeichnet, nur bei Materialien mit gleichwerthigem λ Giltigkeit.

Nachdem wir die Wirkung der äusseren Kraft kennen, gehen wir nun über zur Bestimmung des Weges dieser äusseren Kraft.

Nehmen wir an, dass die Werkzeuge A und B sich genähert haben (Fig. 6, Taf. XX), dass also der Punkt a des Werkzeuges A in die Lage a_1 gelangt ist, wodurch die Länge $\overline{a\,e} = \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ sich auf $\widehat{a_1\,e}$ ausgedehnt hat.

Wenn wir jenen Weg suchen, während welchem die äussere Kraft ihren Maximalwerth erreicht, so müssen wir die gleichmässige Dehnung des Plattentheiles von der Länge $\overline{a\,e}$ in Betracht ziehen, weil die innere Reibung nur bis zu dieser Grenze wächst.

In diesem Falle ist $\widehat{a_1\,e} = \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta\,(1+\lambda)$. (Siehe Seite 67.) Wenn wir aber jenen Weg suchen, welchen die äussere Kraft bis zur Abscheerung des Versuchsstückes zurücklegt, so müssen wir ausser der gleichmässigen Zähigkeitsdehnung auch auf die der Bildsamkeit entsprechende Rücksicht nehmen, weshalb $\widehat{a_1\,e} = \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta\,(1+\lambda)\,(1+\varkappa)$ ist.

Die Curve $\widehat{a_1\,e}$ betrachten wir als ein Parabelsegment, wodurch wir in die Lage gelangen, den Weg des Werkzeuges, d. h. $a\,a_1$ mit Hilfe der Formel für die Bogenlänge des Parabelsegmentes folgendermassen zu bestimmen.

Die Bogenlänge der Parabel ist

$$L = g \cdot \left(1 + \tfrac{8}{3}\,\frac{s^2}{g^2}\right).$$

In unserem Falle ist aber

$$L = a_1\,e = \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta\,(1+\lambda)\,(1+\varkappa)$$

$$g = a_1\,e_1 = a\,e = \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$$

$$s = e\,e_1 = a\,a_1.$$

Diese Werthe substituirt, wird unsere Formel:

$$\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta\,(1+\lambda)\,(1+\varkappa) = \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta \left(1 + \tfrac{8}{3}\,\frac{s^2}{\delta^2 \cdot \operatorname{ctg}^2\beta}\right)$$

sein, woraus man den Weg des Werkzeuges, d. h. den Werth von s berechnen kann:

$$1 + \lambda + \varkappa\,(1+\lambda) = 1 + \tfrac{8}{3}\,\frac{s^2}{\delta^2 \cdot \operatorname{ctg}^2\beta}$$

$$\tfrac{3}{8}\,[\lambda + \varkappa\,(1+\lambda)]\,\delta^2 \cdot \operatorname{ctg}\beta = s^2$$

$$s = \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta\; 0{\cdot}611 \cdot \sqrt{\lambda + \varkappa\,(1+\lambda)}.$$

In jenen Fällen, wo das Material nur gleichmässige Dehnung besitzt, ist

$$s = \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta\; 0{\cdot}611 \cdot \sqrt{\lambda}.$$

27. Scheere mit schiefer Schneide und rechtwinkligem Schneidewinkel, $\angle\,\varphi > 0$, $\angle\,\alpha = 90^0$.

Ein etwas complicirterer Fall des Scheerens tritt dann ein, wenn die eine Schneide nicht mehr parallel zur Platte ist, sondern, wie es Fig. 3,

Taf. XXI darstellt, die Schneide (A) mit der Schneide (B) den Winkel $\angle \varphi$ bildet. In diesem Falle beginnt die Wirkung der oberen Schneide im Punkte a und wirkt auf den unter diesem Punkte sich befindlichen unendlich schmalen Streifen so lange, bis dieser durch die secundäre Wirkung der äusseren Kraft zerrissen wird. Dies geschieht aber nach Punkt 26 erst dann, wenn die Schneide A den Weg $s = 0{\cdot}611 \cdot \delta \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot \sqrt{\lambda + \varkappa(1+\lambda)}$ zurückgelegt hat.

Nehmen wir an, es sei dieser Weg in Fig. 3, Taf. XXI mit $a\,a_2 = s$ bezeichnet, so hat, wenn die Schneide nach a_2 gelangt, die äussere Kraft sich schon auf den Plattentheil $a\,m$ erstreckt, dessen Werth folgendermassen ausgedrückt werden kann:

$$\overline{a\,m} = \overline{a\,a_2} \cdot \operatorname{ctg} \varphi = s \cdot \operatorname{ctg} \varphi$$

oder

$$\overline{a\,m} = 0{\cdot}611 \cdot \delta \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \varphi \cdot \sqrt{\lambda + \varkappa(1+\lambda)}.$$

Wenn die Schneide weiter schreitet, vergrössert sich die Berührungsfläche nicht mehr, weil der Theil unter a seinen Zusammenhang verliert. Sobald also die Schneide den Weg $\overline{a\,a_2}$ überschritten hat, erhält die äussere Kraft ihren maximalen Werth. Den Ausdruck dieser maximalen äusseren Kraft erhalten wir, wenn wir in die Formel der Scheerkraft anstatt b den Werth $\overline{a\,m}$ einstellen. Es wäre also

$$Q_{\max} = \frac{\delta \cdot a\,m}{1+\lambda} \cdot Nf_{\max} \cdot \sin \beta$$

oder

$$Q_{\max} = \frac{\delta^2 \cdot \sqrt{\lambda + \varkappa(1+\lambda)}}{1+\lambda} \cdot Nf_{\max}\, 0{\cdot}611 \cdot \operatorname{ctg} \varphi \cdot \cos \beta$$

und wenn $\varkappa = 0$ ist,

$$Q_{\max} = \delta^2 \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{1+\lambda} \cdot Nf_{\max}\, 0{\cdot}611 \cdot \operatorname{ctg} \varphi \cdot \cos \beta,$$

wenn die ganze äussere Kraft Druckwirkung ausüben würde. Die äussere Kraft wirkt jedoch auf eine schiefe Schneide. Da aber nur jene Komponente Druckwirkung ausübt, welche auf die Berührungsfläche senkrecht steht, so muss die äussere Kraft $o\,\varrho$ (Fig. 2, Taf. XXI) in eine senkrechte $o\,\sigma$ und eine hierauf normale Komponente $o\,\tau$ zerlegt werden. Die Werthe dieser zwei Komponenten sind folgende:

$$\overline{o\,\sigma} = \overline{o\,\varrho} \cdot \cos \varphi$$

$$\overline{o\,\tau} = \overline{o\,\varrho} \cdot \sin \varphi.$$

Bei Ableitung der Formel der Scheerkraft wurde die Richtung der äusseren Kraft normal zur Oberfläche der Platte genommen, es wird somit nur jene Komponente Scheerwirkung ausüben, die in die Scheerrichtung fällt, weshalb $\overline{o\,\sigma}$ weiter in zwei Komponenten zerlegt werden muss, und zwar in eine normale J und eine horizontale H, deren Werth in folgenden gegeben ist:

$$J = \overline{o\,\sigma} \cdot \cos \varphi = \overline{o\,\varrho} \cos^2 \varphi$$

und

$$H = \overline{o\sigma} \cdot \sin\varphi = \overline{o\varrho} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi.$$

Die Scheerwirkung bewirkt also die Komponente J, weshalb der Werth derselben durch die früher abgeleitete Formel gegeben ist, daher

$$J = \frac{\delta \cdot \overline{am}}{1+\lambda} \cdot Nf_{\max} \cdot \sin\beta = \overline{o\varrho} \cdot \cos^2\varphi;$$

nachdem aber $\overline{o\varrho} = Q$ ist, wird

$$Q \cdot \cos^2\beta = \frac{\delta \cdot \overline{am}}{1+\lambda} \cdot Nf_{\max} \cdot \sin\beta.$$

Hieraus erhalten wir die Formel der gesammten äusseren Kraft:

$$Q_{\max} = \frac{1}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{\delta \cdot \overline{am}}{1+\lambda} \cdot Nf_{\max} \cdot \sin\beta$$

oder noch

$$Q_{\max} = \frac{1}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{\delta^2\sqrt{\lambda + \varkappa(1+\lambda)}}{1+\lambda} \cdot Nf_{\max} \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{ctg}\varphi.$$

28. Scheere mit parallelen Schneiden und spitzem Schneidewinkel, $\angle\varphi = 0^0$, $\angle\alpha < 90^0$.

Bisher haben wir die beim Scheeren vorkommenden einfachsten Fälle untersucht. Gehen wir nun auf jenen Fall über, wo die Scheerkanten zwar parallel, aber deren Schneidewinkel (α) kleiner als 90^0 (gewöhnlich 85^0—82^0) sind. Diese Anordnung der Scheeren zeigen die Fig. 9 und 10 der Taf. XX.

Wir haben in Punkt 26 gesehen, dass eine regelmässige Scheerbeanspruchung nur dann auftritt, wenn die äussere Kraft schon auf eine $\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ breite Fläche wirkt. Da aber in gegenwärtigem Falle, nach Fig. 9a, das Werkzeug im Anfange der Kraftwirkung die Platte nur mit der Kante berührt, so muss dieses, um eine Scheerwirkung hervorzubringen, so tief in die Platte eindringen, dass es mit derselben in der Breite $\overline{ag} = \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ in Berührung komme, so wie dies Fig. 10 zeigt.

Das Werkzeug legt also vor dem Scheeren den Weg $\overline{aa_1} = s_1$ zurück, welchen wir, da

$$\overline{aa_1} = \overline{ag} \cdot \operatorname{ctg}\alpha \quad \text{und} \quad \overline{ag} = \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$$

ist, auch folgendermassen ausdrücken können:

$$s_1 = \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{ctg}\alpha.$$

Einen so grossen Weg macht sowohl Werkzeug A als auch B. — Durch das Eindringen beider Schneiden vermindert sich die Scheerfläche, beziehungsweise die abzuscheerende Plattendicke, weshalb bei Berechnung der äusseren Kraft anstatt δ nur $\delta - 2s_1 = \delta(1 - 2 \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{ctg}\alpha)$ in Betracht zu nehmen ist.

Die Formel der Scheerkraft ist nach Punkt 26:

$$Q = \frac{\delta \cdot b}{1+\lambda} \cdot Nf_{\max} \cdot \sin\beta.$$

Den Werth von $\delta - 2s_1$ anstatt dem hier vorkommenden δ in dieser Formel substituirt, wird

$$Q = \frac{\delta\,(1 - 2 \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{ctg}\alpha) \cdot b}{1 + \lambda} \cdot Nf_{\max} \cdot \sin\beta.$$

Setzen wir

$$(1 - 2 \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{ctg}\alpha) = A,$$

so ist

$$Q = \frac{\delta \cdot b}{1 + \lambda} \cdot Nf_{\max} \cdot A \cdot \sin\beta.$$

Dieses wäre der Ausdruck der Scheerkraft, wenn die ganze äussere Kraft wirken würde. Es wirkt aber im gegebenen Momente nur ein Theil der äusseren Kraft, weil die Berührungsfläche des Werkzeuges schief ist.

Nachdem nur jene Kräfte auf die Platte Druckwirkung ausüben, welche normal auf die Berührungsfläche stehen, so muss nach Fig. 11, Taf. XX die auf das Werkzeug wirkende äussere Kraft $Q = \overline{or}$ in zwei solche Komponenten zerlegt werden, deren eine $\overline{ov} = Q \cdot \sin\alpha$ normal auf $\overline{am}$, die andere aber $\overline{ot} = Q \cdot \cos\alpha$ parallel mit $\overline{am}$ ist. Von diesen zwei Komponenten verursacht $\overline{ot}$ im Führungsmechanismus des Werkzeuges Reibung und $\overline{ov}$ übt auf die Fläche $\overline{am}$ (Fig. 11, Taf. XX) Druck aus.

Bei Ableitung der Formel nahmen wir als Scheerkraft eine solche äussere Kraft in Betracht, welche auf die Oberfläche der Platte senkrecht steht. Wir müssen also die Komponente $\overline{ov}$ wieder in eine zur Oberfläche der Platte senkrecht stehende

$$J = ov \cdot \sin\alpha = Q \cdot \sin^2\alpha$$

und in eine zu J normale

$$H = \overline{ov} \cdot \cos\alpha = Q \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

zerlegen. Letztere Komponente trachtet die Platte zu verschieben, während J die Scheerwirkung bewerkstelligt.

Die Formel, welche wir weiter oben abgeleitet haben, entspricht also der Komponente J. Es ist daher

$$J = \frac{\delta \cdot b}{1 + \lambda} \cdot Nf_{\max} \cdot A \cdot \sin\beta = Q \cdot \sin^2\alpha.$$

Hieraus können wir den Gesammtwerth jener äusseren Kraft Q finden, die auf das Werkzeug zu wirken hat:

$$Q = \frac{1}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{\delta \cdot b}{1 + \lambda} \cdot Nf_{\max} \cdot A \cdot \sin\beta,$$

worin $A = 1 - 2 \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{ctg}\alpha$ ist.

Mit Hilfe dieser Formel lässt sich das Verhältniss zwischen der äusseren Kraft und den Körperdimensionen bestimmen. So z. B. finden wir die auf die Flächeneinheit entfallende äussere Kraft, d. h. die Scheerfestigkeit

$$\frac{Q}{\delta \cdot b} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \cdot Nf_{\max} \cdot A \cdot \frac{1}{1 + \lambda} \cdot \sin\beta.$$

Diese Formel sagt uns, dass die auf die Flächeneinheit entfallende Scheerkraft — die Scheerfestigkeit — nur von den Eigenschaften des Materials und von der Gestalt des Werkzeuges abhängt, folglich bei gleichem Material und gleichem Werkzeuge constant ist.

Bei proportionalen Körpern ist das Verhältniss der Druckkräfte

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\frac{1}{\sin^2\alpha_1} \cdot \frac{\delta_1 \cdot b_1}{1+\lambda_1} \cdot Nf_{\max} \cdot A_1 \cdot \sin\beta_1}{\frac{1}{\sin^2\alpha_2} \cdot \frac{\delta_2 \cdot b_2}{1+\lambda_2} \cdot Nf_{\max} \cdot A_2 \cdot \sin\beta_2}.$$

Weil aber bei gleichem Material und Werkzeuge

$\angle\alpha_1 = \angle\alpha_2$, $\angle\beta_1 = \angle\beta_2$, $A_1 = A_2$, $Nf_{1\max} = Nf_{2\max}$ und $\lambda_1 = \lambda_2$,

so ist

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\delta_1 \cdot b_1}{\delta_2 \cdot b_2} = \frac{\delta_1^2}{\delta_2^2}$$

und

$$\frac{Q_1}{\delta_1^2} = \frac{Q_2}{\delta_2^2}.$$

Also bei gleichem Material ist die auf das Quadrat der Dicke bezogene Scheerkraft constant, wie dies auch Kick fand.

Es folgt ferner noch aus unserer Formel, dass bei verschiedenen Materialien, jedoch bei gleichen Werkzeugen und gleich dimensionirten Platten das Verhältniss der Scheerkräfte folgendes ist:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\frac{Nf_{1\max}}{1+\lambda_1}}{\frac{Nf_{2\max}}{1+\lambda_2}} \cdot \frac{A_1 \cdot \sin\beta_1}{A_2 \cdot \sin\beta_2}$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{Nf_{1\max} \cdot \frac{1}{1+\lambda_1} \cdot A_1 \cdot \sin\beta_1}{Nf_{2\max} \cdot \frac{1}{1+\lambda_2} \cdot A_2 \cdot \sin\beta_2},$$

d. h. die Scheerkräfte hängen von der maximalen Härte, der gleichmässigen Dehnung und dem Winkel β ab.

Wir wollen uns nun, weiter gehend, mit der Bestimmung des Weges befassen.

In Punkt 26 fanden wir für den Weg des Werkzeuges bis zur Beendigung der gleichmässigen Dehnung den Ausdruck

$$s = \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot 0{\cdot}611 \cdot \sqrt{\lambda}$$

und bis zur Beendigung der bildsamen Dehnung

$$s = \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot 0{\cdot}611 \cdot \sqrt{\lambda + \varkappa(1+\lambda)}.$$

Diese Formeln sind auch hier giltig, weil die Länge des gezogenen Theiles ($ae = \delta \operatorname{ctg}\beta$) dieselbe ist.

29. Scheere mit schiefer Schneide und spitzem Schneidewinkel, z. B. $\angle \varphi = 5^0$, $\angle \alpha = 83^0$.

Die am häufigsten benützte Scheere ist in Fig. 1b, Taf. XXI dargestellt. Hier ist die obere Schneide schief und schliesst mit der unteren den $\angle \varphi$ ein. Beide Schneiden haben einen spitzen Schneidewinkel (α), der gewöhnlich $82^0 — 83^0$ ist.

Wenn wir uns die Platte auf unendlich schmale Streifen zertheilt denken, so dass jeder Streifen nur mit einem einzelnen Punkte der Schneide (A) in Berührung steht, so wissen wir nach Punkt 26, dass der unter dem Punkte a sich befindliche Streifen seinen Zusammenhang erst dann verliert, wenn die Schneide den Weg s zurückgelegt hat. Dieser Weg möge in Fig. 1b und Fig. 3 mit $\overline{a a_2}$ bezeichnet sein und ist dessen Formel nach Punkt 26:

$$s = \delta \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot 0{\cdot}611 \cdot \sqrt{\lambda + \varkappa (1 + \lambda)}$$

oder

$$s = \delta \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot 0{\cdot}611 \cdot \sqrt{\lambda}.$$

So lange das Werkzeug diesen Weg nicht zurückgelegt hat, kommt es mit einem immer längeren Theile der Platte in Berührung. Wenn aber die Schneide schon in a_2 angekommen ist, dann berührt sie die Platte in einer Länge von $\overline{a m}$, deren Werth

$$\overline{a m} = \overline{a a_2} \cdot \operatorname{ctg} \varphi = s \cdot \operatorname{ctg} \varphi$$

oder

$$\overline{a m} = \delta \cdot \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \varphi \, 0{\cdot}611 \cdot \sqrt{\lambda + \varkappa (1 + \lambda)} = \delta \cdot \Theta$$

sein wird, wenn

$$\Theta = \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \varphi \, 0{\cdot}611 \cdot \sqrt{\lambda + \varkappa (1 + \lambda)} \quad \text{ist.}$$

Hingegen, wenn $\varkappa = 0$, so ist

$$\Theta = \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \varphi \, 0{\cdot}611 \cdot \sqrt{\lambda}.$$

Wir erhalten daher die Formel der Scheerkraft für diesen Fall, wenn wir in die im Punkt 28 abgeleitete Formel derselben anstatt b den Werth $\overline{a m} = \Theta \cdot \delta$ substituiren:

$$Q = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{\delta \cdot a m}{1 + \lambda} \cdot N f_{\max} \cdot A \cdot \sin \beta$$

oder

$$Q = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{\delta^2}{1 + \lambda} \cdot \Theta \cdot N f_{\max} \cdot A \cdot \sin \beta.$$

Man muss hier noch in Betracht ziehen, dass die äussere Kraft auf eine schiefe Schneide wirkt, weshalb die jetzt abgeleitete Formel (Punkt 27) nicht den Werth von Q, sondern von J bezeichnet.

In Punkt 27 haben wir gesehen, dass

$$J = o \sigma \cdot \cos \varphi = o \varrho \cdot \cos^2 \varphi = Q_{\max} \cdot \cos^2 \varphi$$

(Fig. 2, Taf. XXI), folglich ist

$$J = \frac{1}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{\delta \cdot \overline{am}}{1+\lambda} \cdot Nf_{\max} \cdot A \cdot \sin\beta = Q_{\max} \cdot \cos^2\varphi,$$

woraus die Formel für die gesammte Scheerkraft:

$$Q_{\max} = \frac{1}{\cos^2\varphi \cdot \sin^2\alpha} \cdot \frac{\delta \cdot \overline{am}}{1+\lambda} \cdot Nf_{\max} \cdot A \cdot \sin\beta$$

oder

$$Q_{\max} = \frac{1}{\cos^2\varphi \cdot \sin^2\alpha} \cdot \frac{\delta^2}{1+\lambda} \cdot \Theta \cdot Nf_{\max} \cdot A \cdot \sin\beta.$$

Diese Formel hat Giltigkeit, wenn $\Theta \cdot \delta = \overline{am} > b$ ist; sonst ist anstatt $\overline{am}$ der Werth von b zu nehmen und ist in letzterem Falle:

$$Q_{\max} = \frac{1}{\cos^2\varphi \cdot \sin^2\alpha} \cdot \frac{\delta \cdot b}{1+\lambda} \cdot Nf_{\max} \cdot A \cdot \sin\beta.$$

Aus diesen Formeln folgt, dass die Scheerkräfte für verschieden dicke Platten aus demselben Material, d. h. wenn φ, α, λ, $\varkappa$, $Nf_{\max}$ constant sind, in folgendem Verhältnisse stehen:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\delta_1^2}{\delta_2^2},$$

woraus

$$\frac{Q_1}{\delta_1^2} = \frac{Q_2}{\delta_2^2}$$

ist, oder mit Worten, dass die Scheerkräfte auch in diesem Falle mit den Quadraten der Platten-Dicken proportional sind, und dass die Scheerkraft bezogen auf das Quadrat der Dicke bei ein und demselben Material constant ist, wie dies auch schon Kick festgestellt hat.

Bei diesen Scheeren ist also das Gesetz der proportionalen Widerstände im Allgemeinen giltig und zwar darum, weil unter Einwirkung der Schneide immer ein mit der Dicke proportionaler Theil ($\Theta \cdot \delta$) steht.

Mit Hilfe der Formel der maximalen Scheerkraft lässt sich auch die zum Scheeren nothwendige äussere Arbeit berechnen.

Wir wissen, dass, während der Punkt a des Werkzeuges (Fig. 3 auf Taf. XXI) nach a_2 gelangt, die Kraft beständig zunimmt, weshalb die Gestalt des Diagrammes dieser Scheerarbeit annäherungsweise ein Dreieck bildet, dessen Basis $\overline{aa_2} = s$ und dessen Höhe $Q_{\max}$ ist und kann deshalb die Fläche dieses Diagrammtheiles, d. h. die Grösse der Arbeit des ersten Theiles mit $\frac{Q_{\max} \cdot s}{2}$ ausgedrückt werden. Sobald die Schneide den Punkt a_2 überschreitet, den Randpunkt e_3 aber noch nicht berührt, bleibt mit dem

Werkzeuge immer ein gleichlanger, $\delta \cdot \Theta = \overline{a\,m}$, Theil in Berührung und ist deshalb die äussere Kraft bis zu dieser Grenze constant, folglich bildet die Gestalt des Diagrammes dieser Scheerarbeit ein Viereck, dessen Basis $\overline{a_2\,a_3}$ und dessen Höhe $Q_{\max}$ ist, so dass dessen Fläche, d. h. die Grösse des zweiten Theiles der Arbeit mit $\overline{a_2\,a_3} \cdot Q_{\max}$ ausgedrückt werden kann. Da aber $\overline{a_2\,a_3} = \overline{e_2\,c_3} = \overline{c\,c_3} - \overline{c\,c_2} = \overline{a\,c_3} \cdot \operatorname{tg}\varphi - \overline{a\,a_2}$ und weil $\overline{a\,c_3}$ gleich der Breite b des Körpers und $\overline{c\,c_2} = \overline{a\,a_2} = s$, so ist $\overline{a_2\,a_3} = b \cdot \operatorname{tg}\varphi - s$, damit also der zweite Theil der Arbeit:

$$Q_{\max}(b \cdot \operatorname{tg}\varphi - s).$$

Wenn das Werkzeug noch weiter fortschreitet, nimmt die Kraft so lange ab, bis dieses nach c_4 gelangt, wo dann der Widerstand $= 0$ ist. Die Gestalt des Diagrammes dieser Scheerarbeit bildet also wieder annäherungsweise ein Dreieck, dessen Basis $\overline{e_3\,c_4} = s$ und dessen Höhe $Q_{\max}$ beträgt und dessen Fläche, d. h. die Grösse des dritten Theiles der Arbeit daher $\frac{Q_{\max} \cdot s}{2}$ sein wird.

Die Summe dieser drei Arbeitstheile ist

$$\mathfrak{A} = \frac{Q_{\max} \cdot s}{2} + Q_{\max}(b \cdot \operatorname{tg}\varphi - s) + \frac{Q_{\max} \cdot s}{2},$$

$$\mathfrak{A} = Q_{\max}\left(\frac{s}{2} + b \cdot \operatorname{tg}\varphi - s + \frac{s}{2}\right),$$

$$\mathfrak{A} = Q_{\max} \cdot b \cdot \operatorname{tg}\varphi.$$

Bei breiten Platten erhält man also die Arbeit des Scheerens als das Product aus der Maximalkraft, der Breite und $\operatorname{tg}\varphi$.

Wenn wir in diese Formel den Werth von $Q_{\max}$ einsetzen, so ist

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\cos^2\varphi + \sin^2\alpha} \cdot \frac{\delta^2 \cdot b}{1+\lambda} \cdot \Theta \cdot Nf_{\max} \cdot \Lambda \cdot \sin\beta \cdot \operatorname{tg}\varphi$$

wenn aber $\overline{a\,m} > b$ ist, darf man dieses Verfahren nicht mehr anwenden, da dieses nur bei breiten Platten einen noch genügend genauen Werth ergiebt.

Aus diesen Formeln folgt, dass bei gleichem Werkzeuge und Material das Verhältniss der Arbeiten — wenn $\Theta \cdot \delta < b$ — folgendes ist:

$$\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2} = \frac{\delta_1^2 \cdot b_1}{\delta_2^2 \cdot b_2}$$

oder dass

$$\frac{\mathfrak{A}_1}{\delta_1^2 \cdot b_1} = \frac{\mathfrak{A}_2}{\delta_2^2 \cdot b_2}$$

constant ist.

Bei proportionalen Körpern aber, nachdem $\frac{b_1}{b_2} = \frac{\delta_1}{\delta_2}$, wird

$$\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2} = \frac{\delta_1^3}{\delta_2^3}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{A}_1}{\delta_1^3} = \frac{\mathfrak{A}_2}{\delta_2^3}$$

constant sein, wie dies auch aus dem Kick'schen Gesetze folgt.

Wir müssen noch hinzufügen, dass die abgeleitete Formel nur jene Arbeit ergiebt, welche zur Ueberwindung der inneren Reibung nöthig ist, also nur die nützliche Arbeit.

30. Versuchsresultate.

Um mich von der Richtigkeit der abgeleiteten Scheerformeln zu überzeugen, machte ich die Scheerversuche mit denselben Materialien, deren Eigenschaften ich früher durch Zug- und Druckversuche schon bestimmt habe. Diese Versuche führte ich mit dickeren Platten auf der Werdermaschine aus, welche ich zu diesem Behufe mit zweierlei Scheeren und zwar mit solchen von parallelen und mit solchen von schiefen Schneiden, ausserdem zur Aufnahme von Diagrammen mit einem Indicator ausgestattet habe.

Jedes Material wurde in zwei bis dreierlei Dicken und von jeder Dicke gewöhnlich zweimal gescheert. Die Scheerkraft wurde mit der Waage der Werdermaschine und aus dem Diagramme bestimmt.

Die Resultate dieser zwei Bestimmungsarten waren nicht immer übereinstimmend; in diesem Falle notirte ich immer beide Werthe. Die Versuchs- und Rechnungsresultate sind in nachstehender Tabelle zusammengefasst. (Siehe Tabelle über Resultate des Scheerens auf Seite 80, 81.)

Aus dieser Tabelle geht hervor, dass die Rechnungs- und Versuchsresultate innerhalb des Ungleichheitsgrades des Materials vollkommen gleich sind, womit die Richtigkeit der abgeleiteten Formel als bewiesen zu betrachten ist.

Bezüglich der einzelnen Materialien ist folgendes zu bemerken:

a) Blei gab mit den früher bestimmten Werthen von β, λ, $\varkappa$ für Nf_{max} die Grenzwerthe von 2·05 bis 2·5.

b) Zinn gab mit den früher bestimmten Werthen von β, λ, $\varkappa$ für Nf_{max} die Grenzwerthe von 2·17 bis 2·8.

c) Bei Kupfer sind zwar die früher bestimmten Werthe λ und β vollkommen giltig, für Nf_{max} aber ergab sich bei parallelen Schneiden als Werth 24, bei schiefen Schneiden theilweise 24, theilweise 25 und nur in einem Falle über 26·3. Es ist hier noch zu bemerken, dass bei den Versuchen mit schiefen Schneiden der Werth für $\varkappa = 0{\cdot}08$ ist, obwohl bei den Zugversuchen $\varkappa = 0{\cdot}5 - 0{\cdot}88$ war.

d) Bei Prima-Kesselblech behielten nicht nur λ und β, sondern auch $\varkappa$ und Nf_{max} ihren früheren Werth bei. Für Nf_{max} ergab sich in allen Fällen der Werth von 36 mit Ausnahme von zwei Versuchen, wo $Nf_{max} = 33$ war und sind deshalb die Grenzwerthe für Nf_{max} 33 und 36.

Um den Einfluss der Zähigkeit zu untersuchen, scheerte ich auch ein solches Prima-Kesselblech, welches früher schon zerrissen wurde, bei welchem die Zähigkeit vernichtet, also $\lambda = 0$ war. Die Formel ergab auch hier einen ganz entsprechenden Werth, d. h. für $Nf_{max} = 37{\cdot}5$. Die Ursache dieses grösseren Werthes ist nicht die Sprödigkeit, sondern die Ungleichheit des Materials, wie es sich auch später beim Lochen fand.

e) Bei Secunda-Kesselblech konnte ich den Werth von $\varkappa$ nicht controliren, da die gescheerten Stücke eine zu geringe Breite besassen. Bei Annahme der Werthe von λ und β ergab dieses Material für Nf_{max} die Grenzwerthe 35·7 und 39·7 und zwar den letzteren bei Scheeren mit parallelen Schneiden, den ersteren bei solchen mit schiefen Schneiden.

Um den Einfluss der Zähigkeit nochmals zu controliren, scheerte ich auch ein solches Secunda-Kesselblech, welches früher schon zerrissen wurde, und erhielt für Nf_{max} den Werth von 39·7, also denselben wie bei zähem Material, wodurch nun abermals resultirt, dass Nf_{max} eine absolute Eigenschaft des Materials ist und dass die Formel der Scheerkraft den Einfluss der Zähigkeit richtig darstellt, dass also die Scheerfestigkeit durch Beanspruchungen erhöht werden kann.

f) Für die 18 mm dicke Messingplatte haben wir schon zweierlei Werthe, nämlich diejenigen, welche aus der Zugbeanspruchung berechnet sind, wo $\lambda = 0{\cdot}5$, $\varkappa = 0$, $Nf_{max} = 24$ war und jene, welche der Druckbeanspruchung entsprechen, wo $\lambda = 0{\cdot}24$, $\varkappa > 0$ und $Nf_{max} = 29$ ist.

Beim Scheeren gelangen sowohl für λ als auch für Nf_{max} die Werthe der Druckbeanspruchung zur Geltung und zwar sowohl bei Scheeren mit paralleler Schneide als auch bei solchen mit schiefer Schneide, wo $Nf_{max} = 29$ war und für $\varkappa$ der Werth 0·1.

g) Mit dem 15 mm dicken Messingblech wurden keine Scheerversuche gemacht.

h) Aus dem 12 mm dicken Messingblech habe ich mittelst Abhobeln 10 und 5 mm dicke Bleche erzeugt, so dass ich also aus demselben Material Bleche von drei verschiedenen Stärken hatte.

Das Scheeren wurde nur mit einem Werkzeuge mit parallelen Schneiden durchgeführt. Bei dem 5 mm starken Blech erhielt ich für λ, β und Nf_{max} die Werthe der Druckbeanspruchung. Bei den Blechen von 10 und 12 mm Stärke aber ergaben sich für Nf_{max} kleinere Werthe, so dass die Grenzwerthe von Nf_{max} zwischen 55·5 und 58·5 variiren.

i) Bei Deltametall ergab sich bei einem Werthe von $\lambda = 0{\cdot}135$: $Nf_{max} = 45$.

k) Bei Zink treten weder die Druck- noch die Zugresultate rein auf. Neben jenen Werthen von λ und β, die beim Drucke gewonnen wurden,

Resultate des Scheerens.

Nummer	Benennung des Versuchsmaterials	Versuchswerthe wenn $\varphi = 0^0$, $\alpha = 83^0$			Rechnungswerthe	Charakteristische Eigenschaften des Materials				Werthe der Coëfficienten			Versuchswerthe wenn $\varphi = 5^0$, $\alpha = 83^0$			Rechnungswerthe	
		δ mm	b mm	Q kg	Q kg	Nf_{max}	λ	$\varkappa$	β	A	Θ	$\Theta \cdot \delta$	δ mm	b	Q kg	Q kg	Nf_{max}
1	Blei (gegossen)	18·2	36·2	940 950	940	2·5	0·27	1·57	58°	0·849	6·55	119	18·2	100	2000 2200	2120	2·05
2	„ (gegossen und abgehobelt) . .	12·2	36·2	600 700	630	2·5	0·27		58°			79·8	12·2	100	1250 1500	1390	2·5
3	Zinn (gegossen)	18	36·2	1170	1180	2·8	0·174	4·56	61°	0·865	9·1	164	18	100	2750 3000	2850	2·4
4	„ (gegossen und abgehobelt) . .	12	36·2	860	790	2·8	0·174		61°			110	12·1	100	1700 1809	1800	2·3
5	Kupfer (gewalzt)	17·9	54·3	12400 12300	12700	24	0·25	0·08	54°30′	0·826	2·95	54·3	17·9	120·8	13500 13700	13250	25
6	„ (gewalzt)	15·0	54·3	10500 10700	10700	24	0·25		54°30′			45·1	15	120·8	9200 9600	9330	25
7	„ (gewalzt)	12·3	54·3	8700 8800	8700	24	0·25		54°30′			37·3	12·3	120·8	6200 6500 7100	6100 6300 6600	24 25 26·3
8	Prima-Kesselblech	18·1	35·2	14250 14750	13900	36	0·17	0·84	56°30′		4·66	84·4	18·1	151·20	29500	31000	33
9	„ (gewalzt)	—	—	—	—	36	—	0·84	—	0·839		84·4	—	35·2	14500	14100	36
10	„ (gewalzt und abgehobelt) .	15	48·4	15500 15750 16250	15800	36	0·17	0·84	56°30′			70	15	48·4	14700 15000	14700 16190	33 36
11	„ (gewalzt und abgehobelt) .	12·1	48·7	13000 13250	12800	36	0·17	0·84	56°30′			56·4	12·1	48·7	11700 12000 12700	12000 13100	33 36

12	Secunda-Kesselblech (gewalzt)	$18\cdot_1$	$48\cdot_3$	19250 19750	19900	$39\cdot_7$	$0\cdot_{175}$	?	54°	$0\cdot_{823}$	—	—	$18\cdot_1$	$48\cdot_3$	18750 19000 19500	18000 20000	$35\cdot_7$ $39\cdot_7$
13	„ (gewalzt und abgehobelt)	$15\cdot_1$	$48\cdot_3$	17250	16600	$39\cdot_7$	$0\cdot_{175}$	?	54°		—	—	$15\cdot_1$	$43\cdot_3$	14750 15750	15000	$39\cdot_7$
14	„ (gewalzt und abgehobelt)	$12\cdot_1$	$48\cdot_4$	13500 13700 14000	13400	$39\cdot_7$	$0\cdot_{175}$	?	54°		—	—	$12\cdot_1$	$48\cdot_4$	11750 12000 12225	12000 13200	$35\cdot_7$ $39\cdot_7$
15	Messing (gewalzt)	$17\cdot_8$	$54\cdot_2$	16300	16700	29	$0\cdot_{24}$	$0\cdot_1$	59°	$0\cdot_{854}$	$2\cdot_{54}$	**46**	$17\cdot_8$	$120\cdot_8$	14000 15000	14200	29
16	„ (gewalzt)	$12\cdot_1$	$54\cdot_3$	17500 17400	17500	$55\cdot_5$	$0\cdot_{23}$	0	48°		—	—	—	—	—	—	—
17	„ (gewalzt und abgehobelt)	10	$36\cdot_4$	9500 9700	9800	$55\cdot_5$	$0\cdot_{23}$	0	48°	$0\cdot_{79}$	—	—	—	—	—	—	—
18	„ (gewalzt und abgehobelt)	5	$36\cdot_4$	5100	5150	$58\cdot_5$	$0\cdot_{23}$	0	48°		—	—	—	—	—	—	—
19	Deltametall	$12\cdot_1$	$54\cdot_2$	17700	17500	45	$0\cdot_{135}$	0	54°	$0\cdot_{823}$	—	—	—	—	—	—	—
20	Zink (gegossen und abgehobelt) .	18	$36\cdot_6$	3900 4150	4100	$11\cdot_3$	$0\cdot_1$	0	50°	$0\cdot_{805}$	—	—	—	—	—	—	—
21	„ (gegossen und abgehobelt) .	12	$36\cdot_6$	2850	2760	$11\cdot_3$	$0\cdot_1$	0	50°		—	—	—	—	—	—	—
22	Graues Gusseisen (nicht abgehob.)	$14\cdot_5$ $15\cdot_2$	95	19950 21900	—	24	$0\cdot_{06}$	0	53°	$0\cdot_{821}$	—	—	—	—	—	—	—
23	Durch Zug schon beanspruchtes	$14\cdot_7$	$33\cdot_4$	15000 15250	—	$37\cdot_5$	0	$0\cdot_{84}$	56°30′	$0\cdot_{839}$	—	—	15	$33\cdot_8$	13750	13600	$37\cdot_5$
24	Prima-Kesselblech	—	—	—	—	—	0	—	54°30′		—	—	$14\cdot_7$	$33\cdot_4$	13500	13200	$37\cdot_5$
25	Durch Zug schon beanspruchtes	$15\cdot_7$	$32\cdot_6$	15750	—	$39\cdot_7$	0	?	54°	$0\cdot_{82}$	—	—	$15\cdot_7$	$32\cdot_6$	13750 7500	13700	$39\cdot_7$
26	Secunda-Kesselblech	$10\cdot_3$	$33\cdot_8$	10500	—	—	0	?	54°		—	—	$9\cdot_9$	33	8000	8800	$39\cdot_7$

war sowohl bei der 18 mm, wie bei der 12 mm starken Platte $Nf_{max} = 11{\cdot}3$. Das Scheeren wurde nur mit einer Parallelscheere durchgeführt.

l) Bei grauem Roheisen finden wir dieselben Verhältnisse wie beim Zink, denn beide haben einen combinirten Reibungscoëfficienten. Beim Scheeren mit parallelen Schneiden ergab sich, die Druckwerthe von β und λ beibehalten, für Nf_{max} der Werth von 24, während beim Drucke dieser Werth auf 66 steigt.

B. Lochen.

Ausser den bisher erörterten Beanspruchungen untersuchte ich die schon öfter erwähnten Metalle noch auf ihr Verhalten beim Lochen.

Ich gebrauchte bei meinen Versuchen nur ein solches Werkzeug, dessen Stempel und Lochring gleichen Durchmesser hatten, weshalb wir im Folgenden nur diesen einfachen Fall betrachten werden.

31. Lochen mit gleich grossem Stempel und Lochring.

Denken wir uns in Fig. 1, Taf. XXII eine zu lochende Platte mit Stempel und Lochring in verticalem Schnitte dargestellt und zeichnen uns hierin das Molekularnetz auf, um hiermit die secundäre Wirkung der äusseren Kraft ersichtlich machen zu können.

Wenn wir uns diese Figur in zwei Theile getrennt vorstellen und einstweilen nur die linke Seite derselben betrachten, finden wir, dass das Werkzeug zwischen (a) und (b) gerade so wirkt, wie eine Scheere mit rechtwinkeligem Schneidewinkel. Wir werden daher die Wirkung der äusseren Kraft so darstellen, dass wir aus jedem Moleküle des Plattenstückes $\overline{ag} = \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ und $\overline{bk} = \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ die Komponenten derselben in beiden Richtungen der Kraftvermittlung aufzeichnen.

Betrachten wir nun den rechten Theil dieser Figur, so finden wir, dass das Werkzeug hier ähnlich einer Scheere mit rechtwinkeligem Schneidewinkel wirkt. Wir werden also beim Vertheilen der äusseren Kräfte ähnlich vorgehen wie auf der linken Seite, d. h. die Komponenten aus jedem einzelnen Moleküle des Stückes $\overline{a_0 g_0} = \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ und $b_0 k_0 = \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ in beiden Richtungen der Kraftvermittlung auftragen.

Aus der so verfertigten Figur sehen wir, 1. dass jene Komponenten, die auf den Ring $a\,c\,b\,c$ und $a_0 c_0 b_0 c_0$ wirken, sich im Gleichgewichte befinden, dass also auf diesen Theil die äussere Kraft keine primäre Wirkung ausübt. Ferner 2. dass sämmtliche wirkungsfähigen Komponenten des Theiles $e\,b\,k\,h$ in der Richtung des Winkels β nach oben und nach links, jene des Theiles $e_0 b_0 k_0 h_0$ nach oben und nach rechts, und dass die Komponenten des Theiles $a\,c\,f\,g$ nach unten und nach rechts, und jene des Theiles $a_0 c_0 f_0 g_0$ nach unten und nach links gerichtet sind.

Die Resultirenden der Komponenten der genannten Theile sind in Fig. 2, Taf. XXII mit $X_1 X_2 X_3 X_4$ bezeichnet. Da aber diese Theile sich in

der Richtung der Resultirenden nicht bewegen können, so müssen diese auf Komponenten (J) in der Bewegungsrichtung des Werkzeuges und in einer hierzu senkrechten Richtung (H) zerlegt werden.

Durch Wirkung von J_1 und J_2 folgt der Plattentheil $a\,c\,c_0\,a_0$, der sich unter dem Stempel befindet, der Richtung des Stempels. Durch die Wirkung von Komponenten von J_3 und J_4 folgt jener Theil, der sich oberhalb des Lochringes befindet, der relativen Bewegungsrichtung dieses, während die Kräfte $H_1\,H_2\,H_3$ und H_4 den Ring, welcher mit $a\,c\,b\,e$ und $a_0\,c_0\,b_0\,e_0$ bezeichnet ist, auf Zug beanspruchen.

Um die verschiedenen Beanspruchungen einfacher und klarer zu bezeichnen, wollen wir nach Fig. 2, Taf. XXII die gezogenen Plattentheile horizontal, die übrigen vertical schraffiren.

Aus Fig. 2 folgt, dass die Lochwirkung vollkommen identisch ist mit der Wirkung einer solchen Scheere, deren Schneide kreisförmig ist, wo also die Scheerbreite anstatt b den Werth von $d\,\pi$ hat, wenn d der Durchmesser des Stempels ist. Wir erhalten daher beim Lochen die Formel der äusseren Kraft, wenn wir in jener Formel der Scheerkraft, welche wir bei Scheeren mit parallelen und rechtwinkeligen Schneiden fanden, anstatt (b) $d\,\pi$ einsetzen; also

$$Q_{\max} = \frac{\delta}{1+\lambda} \cdot d\pi \cdot Nf_{\max} \cdot \sin\beta.$$

Aus Fig. 2, Taf. XXII ist weiterhin noch ersichtlich, dass, wenn $d > 4\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ ist, die gelochte Platte und der ausgestanzte Theil nur in einem Ringe von der Breite $\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ Formänderung und Einschnürung erleidet.

In den Fig. 4, 5, 6 und 7 der Taf. XXI ist die Kräftevertheilung und Beanspruchung unter den Bedingungen vorgeführt, dass $d < 4\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ aber wenigstens $d = \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ sei. Man bemerkt hier, dass die gelochte Platte ebenso beansprucht wird, wie unter den obigen Bedingungen, d. h. der Ring von der Breite $\overline{a\,e} = \overline{a_0\,e_0} = \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ deformirt und schnürt sich ein.

Den ausgestanzten Theil anbelangend, ist aus Fig. 4 und 5 wahrnehmbar, dass, so lange der Werth des Durchmessers $d \begin{matrix} < 4\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta \\ > 2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta \end{matrix}$ ist, der Rand zwar in einem Ringe von der Breite $\overline{c\,b} = \overline{c_0\,b_0} = \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ eingeschnürt, die Mitte aber gestaucht wird.

Wenn $\left(d \begin{matrix} < 2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta \\ > \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta \end{matrix}\right)$ ist (Fig. 6, Taf. XXI), so wird der Lochrand nicht eingeschnürt, sondern etwas gestaucht, wodurch der mittlere Theil $\overline{c\,c_0}$ eingedrückt erscheint. Untersuchen wir endlich den letzten möglichen Fall, wenn nämlich $d < \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ ist (Fig. 8, Taf. XXI). Hier ist ein Lochen nicht mehr möglich und die Moleküle erleiden um den Stempel herum keine Einschnürung mehr, sondern werden nur gestaucht.

Setzen wir unsere Folgerungen in anderer Richtung weiter fort.

Aus den Fig. 4 und 5, Taf. XXI und Fig. 1 und 2, Taf. XXII kann man erkennen, dass der mit $a\,c\,b\,e$ und $a_0\,c_0\,b_0\,e_0$ bezeichnete konische Ring nur dann eine regelmässige Gestalt aufweist, wenn $d > 2\delta \cdot \text{ctg}\,\beta$ ist. Die oben abgeleitete Kraftformel ist also nur bis zu dieser Grenze giltig.

Sobald sich dieses Verhältniss ändert, d. h. wenn $d < 2\delta \cdot \text{ctg}\,\beta$ ist, wird der auf Zug beanspruchte Ring nicht mehr vollständig und regelmässig, wie dies in Fig. 6 und 7 der Taf. XXI dargestellt ist. Man kann hier sehen, dass mit der Abnahme des Stempel-Durchmessers und des Lochringes die Theile $a\,c\,b\,e$ und $a_0\,c_0\,b_0\,e_0$ sich immer mehr und mehr überdecken, weshalb sich im Querschnitte dieses Ringes ein immer grösser werdendes Dreieck $c\,o\,c_0$ (Fig. 6), beziehungsweise $b\,o\,b_0$ (Fig. 7) bildet, welches den Theilen $a\,c\,b\,e$ und $a_0\,c_0\,b_0\,e_0$ gemeinsam angehört und hiermit den Querschnitt des auf Zug beanspruchten ringförmigen Theiles verkleinert.

Wir wissen im Allgemeinen, dass die Zugkraft sich mit dem Querschnitte des gezogenen Versuchsstückes proportional ändert, deshalb muss auch die secundär wirkende Zugkraft (H), also auch jene äussere Kraft, welche diese secundäre Wirkung hervorruft, im Verhältnisse der Querschnittsänderung des gezogenen Theiles abnehmen.

Das Maass der Abnahme des gezogenen Theiles lässt sich mit Hilfe der Fig. 6, Taf. XXI bestimmen. Die Hälfte des Querschnittes des thatsächlich gezogenen Theiles ist:

$$(a\,c\,b\,e) - \frac{(c_0\,o\,c)}{2} = a\,c\,b\,e \cdot \left[1 \cdot \frac{(c_0\,o\,c)}{2\,(a\,c\,b\,e)}\right] = a\,c\,b\,e \cdot C$$

wenn

$$1 - \frac{(c_0\,o\,c)}{2\,(a\,c\,b\,e)} \qquad C.$$

Der gezogene Querschnitt ist also hier C-mal kleiner als der den vorhergehenden Fällen entsprechende. Die beim Lochen nöthige Kraft ist in diesem Falle also auch C-mal kleiner als beim gewöhnlichen Lochen; ihre Formel ist daher:

$$Q = \frac{\delta}{1+\lambda} \cdot d\pi \cdot N f_{\max} \cdot C \cdot \sin\beta.$$

Der Werth des Coëfficienten C lässt sich aus obigen Gleichungen folgendermassen bestimmen.

Der Flächeninhalt des Viereckes $a\,c\,b\,e$ ist

$$\overline{a\,c} \cdot \overline{a\,b} = \delta \cdot \text{ctg}\,\beta \cdot \delta = \delta^2 \cdot \text{ctg}\,\beta.$$

Der Flächeninhalt des Dreieckes $(c_0\,o\,c)$ ist $\frac{c\,c_0 \cdot \overline{o\,g}}{2}$. Nach Fig. 6 ist $\overline{c\,c_0} = \overline{b\,c} - \overline{b\,c_0}$ und $\overline{b\,c} = \delta \cdot \text{ctg}\,\beta$; so auch

$$\overline{b\,c_0} = \overline{b\,b_0} - \overline{b_0\,c_0} = d - \delta \cdot \text{ctg}\,\beta$$

und

$$\overline{c\,c_0} = 2\delta \cdot \text{ctg}\,\beta - d;$$

daher die Fläche des Dreieckes

$$(2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta - d)\frac{og}{2} = (2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta - d)\frac{\delta - o\overline{g'}}{2} =$$

$$= (2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta - d) \cdot \left(\frac{\delta - \frac{d}{2 \cdot \operatorname{ctg}\beta}}{2}\right) =$$

$$= (2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta - d)\frac{2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta - d}{4 \cdot \operatorname{ctg}\beta} = \frac{(2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta - d)^2}{4 \cdot \operatorname{ctg}\beta} .$$

Diese Werthe in die Formel für C substituirt, wird

$$C = 1 - \frac{(2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta - d)^2}{2 \cdot 4 \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot \delta^2 \cdot \operatorname{ctg}\beta} = 1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta - d}{2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta}\right)^2,$$

$$C = 1 - \tfrac{1}{2}\left[1 - 2\frac{d}{2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta} + \left(\frac{d}{2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta}\right)^2\right],$$

$$C - 1 - \tfrac{1}{2} + \frac{d}{2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta}\right)^2,$$

$$C = 0{\cdot}5 + \frac{d}{2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta} - 0{\cdot}5\left(\frac{d}{2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta}\right)^2,$$

diesen Werth in die Formel für Q eingesetzt, ergiebt

$$Q = \frac{\delta}{1 + \lambda} \cdot d\pi \cdot Nf_{\max} \cdot \sin\beta \cdot \left[0{\cdot}5 + \frac{d}{2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta} - 0{\cdot}5\left(\frac{d}{2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta}\right)^2\right].$$

Diese Formel ist, wie wir bereits erwähnt haben, nur dann giltig, wenn

$$d < 2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$$

und im äussersten Falle wenn

$$d = \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$$

ist. Sobald

$$d < \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$$

wird, weicht die Beanspruchung ganz ab, wie es Fig. 8 der Taf. XXI ersichtlich macht.

Aus den zwei beim Lochen erhaltenen Formeln können wir das Verhältniss zwischen den Dimensionen des zu lochenden Körpers und der äusseren Kraft bestimmen.

Setzen wir z. B. voraus, dass wir das Verhältniss der äusseren Kräfte beim Lochen zweier Platten von verschiedenen δ und δ_0 Stärken und gleichen Materials, beim Gebrauche von Stempeln verschiedenen d und d_0 Durchmessers zu suchen haben.

Es sei zu diesem Zwecke zuerst der Fall angenommen, wo im Allgemeinen $\delta > 2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ ist.

Die angenommenen Werthe in unsere Formel substituirt, wird

$$\frac{Q}{Q_0} - \frac{\delta d}{\delta_0 d_0} .$$

Einen zweiten Fall erhalten wir, wenn

$$d < 2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta \text{ ist.}$$

Hier wird

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\delta d\left[0{\cdot}5 + \frac{d}{2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta} - 0{\cdot}5\left(\frac{d}{2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta}\right)^2\right]}{\delta_0 d_0\left[0{\cdot}5 + \frac{d_0}{2\delta_0 \cdot \operatorname{ctg}\beta} - 0{\cdot}5\left(\frac{d_0}{2\delta_0 \cdot \operatorname{ctg}\beta}\right)^2\right]}.$$

Bei proportionalen Körpern ist jedoch:

$$\frac{d}{d_0} = \frac{\delta}{\delta_0} \quad \text{und} \quad \frac{d_0}{\delta_0} = \frac{d}{\delta}$$

daher

$$\frac{d}{2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta} = \frac{d_0}{2\delta_0 \cdot \operatorname{ctg}\beta}.$$

Wenn wir dies substituiren, so ergiebt sich für beide Fälle

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\delta^2}{\delta_0^2},$$

beziehungsweise, dass $\frac{Q}{\delta^2}$ constant ist, wie dies auch Kick's Versuche ergaben.

32. Versuchsresultate.

Um mich von der Richtigkeit der abgeleiteten Formel zu überzeugen, machte ich auf der Werdermaschine mit zweierlei Locheisen, d. h. mit Stempel im Lochring von 15 und 20 mm Durchmesser, Lochversuche.

Ich lochte nahezu alle jene Materialien, mit welchen ich schon die vorhergehenden Versuche gemacht habe.

Bei jedem Materiale und bei denselben Dimensionsverhältnissen machte ich — wenige Fälle ausgenommen — je zwei Versuche.

Die äussere Kraft wurde auch hier — so wie beim Scheeren — auf zweierlei Art, nämlich mit Hilfe des Indikators und mit der Waage der Werdermaschine bestimmt.

Die Versuchsresultate und Rechnungswerthe habe ich in der auf Seite 88 und 89 folgenden Tabelle zusammengestellt, woraus ersichtlich ist, dass das Lochen theilweise unter jenen Verhältnissen, wo $d > 2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$, theilweise wo $d < 2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ war, durchgeführt wurde.

Aus derselben Tabelle ist ferner zu erkennen, dass Versuchs- und Rechnungs-Resultate innerhalb der Grenzen der Ungleichheit des Materials gut übereinstimmen.

Die abgeleitete Formel kann also als richtig angenommen werden.

Bezüglich der einzelnen Metalle ist noch Folgendes zu bemerken:

a) Blei ergab mit den früher bestimmten Werthen von λ und β für $Nf_{\max}$ dieselben 2·05 und 2·5 Grenzwerthe, wie beim Scheeren. Diese

Grenzen sind als die Folge der Ungleichheit des Materials zu bezeichnen.

b) Zinn ergab mit den früher bestimmten Werthen von λ und β für Nf_{max} den Werth 2·8, also denselben wie beim Scheeren. Die Ungleichheitsgrenzen des untersuchten gegossenen Zinnes für Nf_{max} befinden sich also zwischen 2·17 und 2·8.

c) Kupfer ergab mit den früher bestimmten Werthen von λ und β für Nf_{max} denselben Werth, wie bei Zug und Druck, $Nf_{max} = 26·3$.

Auf Grund der Scheer- und Lochversuche kann man $Nf_{max} = 24-26·3$ nehmen.

d) Prima-Kesselblech wurde in zähem und durch Zerreissen spröde gemachtem Zustande gelocht und in beiden Fällen war $Nf_{max} = 37·5$, woraus klar zu sehen ist, dass die verschiedenen Werthe bei den Scheerversuchen von der Ungleichheit und nicht von der Sprödigkeit herstammten. Die Grenzwerthe für Nf_{max} sind 33 und 37·5.

Die Werthe λ und β haben vollkommene Giltigkeit.

e) Secunda-Kesselblech wurde sowohl in zähem als auch in sprödem Zustande gelocht. Es ergab sich mit den früher bestimmten Werthen von λ und β bei zähem und bei sprödem Material für Nf_{max} derselbe Werth (39·7). Nur bei zwei Versuchen mit zähem Material erhielt ich hierfür 35·7.

Aus den Versuchen mit spröde gemachtem Material ist nun ersichtlich, dass die abgeleiteten Formeln den Einfluss der Zähigkeit richtig darstellen.

f) Messingplatte von 18 mm Stärke wurde nicht gelocht.

g) Messingplatte von 15 mm Stärke wurde nur einmal gelocht. Ich fand für $Nf_{max} = 45$ und für $\lambda = 0·30$. Auf Grund dieses einen Versuches lässt sich über dieses Material noch kein Urtheil fällen.

h) Die Messingplatten von 12, 10 und 5 mm Stärke wurden, wie bekannt, aus einer Materialplatte durch Abhobeln erzeugt. Bei der 5 mm starken Platte war $Nf_{max} = 55·5$. Die Grenzen der Ungleichheit des Materials befinden sich also hier zwischen 55·5 und 58·5.

i) Mit Deltametall machte ich nur zwei Versuche und fand mit Beibehalt der Werthe von β und λ, dass $Nf_{max} = 45$ sei. Die Ungleichheit von Nf_{max} befindet sich bei diesem Metalle zwischen 45 und 60.

k) Zink ergab bei normalem Lochen mit den schon bekannten Werthen von β und λ für $Nf_{max} = 15·7$, also nahezu denselben Werth wie beim Druck. Man kann hieraus folgern, dass beim Lochen die molekulare innere Reibung zur Geltung kommt. Die Härte des Materials, d. h. der Werth von Nf_{max}, schwankt also innerhalb der Grenzen von 15·7 und 16·8.

l) Graues Roheisen ergab beim Lochen, wenn $d < 2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ war, mit den bekannten Werthen von β und λ für $Nf_{max} = 50$. Es kommt also

Resultate des Lochens.

Nummer	Benennung des Versuchsmaterials	Versuchswerthe δ mm	d mm	Q kg	Werthe der charakteristischen Eigenschaften des Materials und der Coëfficienten β	$\sin\beta$ / $\operatorname{ctg}\beta$	λ	C	Nf_{max}	$2\delta \operatorname{ctg}\beta$	Rechnungswerthe Q kg
1	Blei (gegossen)	$18{\cdot}_{2}$	20	1800	58^0	$\sin\beta = 0{\cdot}_{848}$	$0{\cdot}_{27}$	$0{\cdot}_{995}$	$2{\cdot}_{37}$	$d < 22{\cdot}_{7}$	1800
2	„ (gegossen und abgehobelt) . .	$12{\cdot}_{2}$	20	1200	58^0	$\operatorname{ctg}\beta = 0{\cdot}_{625}$	$0{\cdot}_{27}$	—	$2{\cdot}_{37}$	$15{\cdot}_{3}$	1200
3	Zinn (gegossen)	18	20	2250 2600	61^0	$\sin\beta = 0{\cdot}_{875}$	$0{\cdot}_{174}$	—	$2{\cdot}_{8}$	$19{\cdot}_{9}$	2370
4	„ (gegossen und abgehobelt) . .	$12{\cdot}_{1}$	20	1300 1600	61^0	$\operatorname{ctg}\beta = 0{\cdot}_{554}$	$0{\cdot}_{174}$	—	$2{\cdot}_{8}$	$13{\cdot}_{3}$	1590
5	Kupfer (gewalzt)	$15{\cdot}_{0}$	20	15600 15750 15850	$54^0\,30'$	$\sin\beta = 0{\cdot}_{814}$	$0{\cdot}_{25}$	$0{\cdot}_{998}$	$26{\cdot}_{3}$	$d < 21{\cdot}_{3}$	15800
6	„ (gewalzt)	$12{\cdot}_{3}$	20	13250 13300	$54^0\,30'$	$\operatorname{ctg}\beta = 0{\cdot}_{713}$	$0{\cdot}_{25}$	—	$26{\cdot}_{3}$	$17{\cdot}_{4}$	13100
7	„ (gewalzt)	12	15	9260 9500 9750	$54^0\,30'$	—	$0{\cdot}_{25}$	—	$26{\cdot}_{3}$	$d < 17$	9700
8	Prima-Kesselblech (gew. u. abgeh.)	15	20	25750 27000	$56^0\,30'$	$\sin\beta = 0{\cdot}_{834}$	$0{\cdot}_{17}$	—	$37{\cdot}_{5}$	$19{\cdot}_{5}$	25200
9	„ (gewalzt und abgehobelt)	12	20	21000 21700	$56^0\,30'$	$\operatorname{ctg}\beta = 0{\cdot}_{662}$	$0{\cdot}_{17}$	—	$37{\cdot}_{5}$	$15{\cdot}_{9}$	20100
10	„ (gewalzt)	$18{\cdot}_{2}$	15	20700 21000	$56^0\,30'$	$\operatorname{ctg}\beta = 0{\cdot}_{662}$	$0{\cdot}_{17}$	$0{\cdot}_{93}$	$37{\cdot}_{5}$	$d < 24$	20400
11	„ (gewalzt und abgehobelt)	15	15	17750 18500	$56^0\,30'$	$\operatorname{ctg}\beta = 0{\cdot}_{662}$	$0{\cdot}_{17}$	$0{\cdot}_{97}$	$37{\cdot}_{5}$	$d < 19{\cdot}_{8}$	17900
12	„ (gewalzt und abgehobelt)	12	15	15500 15700	$56^0\,30'$	$\operatorname{ctg}\beta = 0{\cdot}_{662}$	$0{\cdot}_{17}$	—	$37{\cdot}_{5}$	$15{\cdot}_{9}$	15100
13	Secunda-Kesselblech (gew. u. abgeh.)	$15{\cdot}_{1}$	20	26250 28000	54^0		$0{\cdot}_{175}$	$0{\cdot}_{995}$	$39{\cdot}_{7}$	$d < 22$	26100
14	„ (gewalzt und abgehobelt)	12	20	21750 22750	54^0	$\sin\beta = 0{\cdot}_{809}$	$0{\cdot}_{175}$	—	$39{\cdot}_{7}$	$17{\cdot}_{4}$	20700
15	„ (gewalzt)	18	15	21750	54^0	$\operatorname{ctg}\beta = 0{\cdot}_{727}$	$0{\cdot}_{175}$	$0{\cdot}_{91}$	$39{\cdot}_{7}$	$d < 26$	21000
16	„ (gewalzt und abgehobelt)	15	15	19500	54^0	$\operatorname{ctg}\beta = 0{\cdot}_{727}$	$0{\cdot}_{175}$	$0{\cdot}_{95}$	$39{\cdot}_{7}$	$d < 21{\cdot}_{7}$	18400
17	„ (gewalzt und abgehobelt)	12	15	16500	54^0	$\operatorname{ctg}\beta = 0{\cdot}_{727}$	$0{\cdot}_{175}$	$0{\cdot}_{90}$	$39{\cdot}_{7}$	$d < 17{\cdot}_{4}$	15300

18	Durch Zug schon beanspruchtes Prima-Kesselblech	13·4	20	25700 26700	56° 30′	$\sin\beta = 0{\cdot}_{834}$	0	—	37·5	17·5	26100
19		12·8	20	25000 26000	56° 30′	$\operatorname{ctg}\beta = 0{\cdot}_{662}$	0	—	37·5	17	25000
20		11	20	22000	56° 30′	—	0	—	37·5	14·5	21400
21		13	15	20500	56° 30′	—	0	0·99	37·5	$d < 17{\cdot}_2$	18800
22		10·4	15	16250	56° 30′	—	0	—	37·5	13·8	15300
23	Durch Zug schon beanspruchtes Secunda-Kesselblech	13·2	20	25700 27000	54°	$\sin\beta = 0{\cdot}_{809}$	0	—	39·7	19	26800
24		10·6	20	21700 22000	54°	$\operatorname{ctg}\beta = 0{\cdot}_{727}$	0	—	39·7	15·3	21400
25		10·2	15	15750 16000	54°	$\operatorname{ctg}\beta = 0{\cdot}_{727}$	0	—	39·7	14·7	15500
26	Messing	15·3	20	24400 24500	48°	$\sin\beta = 0{\cdot}_{745}$	0·30	0·96	45	$d < 27{\cdot}_5$	24400
27	„	12	20	23750 24000 24400	48°	$\operatorname{ctg}\beta = 0{\cdot}_9$	—	—	55·5	21·7	24000
28	„	10	20	19250	48°	$\operatorname{ctg}\beta = 0{\cdot}_9$	—	—	55·5	18	20000
29	„	5	20	10000 10250	48°	$\operatorname{ctg}\beta = 0{\cdot}_9$	—	—	55·5	9	10000
30	„	12	15	17100 17500	48°	$\operatorname{ctg}\beta = 0{\cdot}_9$	—	0·95	55·5	$d < 21{\cdot}_7$	17000
31	„	10	15	14200 14250	48°	$\operatorname{ctg}\beta = 0{\cdot}_9$	—	0·98	55·5	$d < 18$	14500
32	„	5	15	7250 7750	48°	$\operatorname{ctg}\beta = 0{\cdot}_9$	—	—	55·5	9	7500
33	Deltametall	12·1	20	23200 23500 24000	54°	$\sin\beta = 0{\cdot}_{809}$ $\operatorname{ctg}\beta = 0{\cdot}_{726}$	0·135	—	45	17·6	24300
34	Zink	12	20	8000 8300	50°	$\sin\beta = 0{\cdot}_{766}$ $\operatorname{ctg}\beta = 0{\cdot}_{839}$	0·1	—	15·7	20·1	8200
35	Graues Gusseisen	15·3	20	30200 32000 36000	53°	$\sin\beta = 0{\cdot}_{798}$ $\operatorname{ctg}\beta = 0{\cdot}_{753}$	0·96	0·99	50	23·3	36000

beim Lochen dieses Materials die molekulare innere Reibung ebenso zur Geltung wie beim Zink.

Die Härte des Materials, d. h. der Werth des $N/_{max}$, lässt sich auf Grund dieses Umstandes mit 50—62 bezeichnen.

V. Rekapitulation der Ergebnisse.

Es sei uns zum Schlusse noch gestattet, die bisherigen Resultate kurz zusammengefasst hier zu wiederholen und anhängend noch einige Folgerungen beizuschliessen.

Bei Behandlung der Beanspruchung ersten und zweiten Grades wurden zwei Aufgaben gelöst; es wurden nämlich die Art der Formänderungen und die hierzu nöthigen Kräfte bestimmt.

Diese Aufgaben musste man, um überflüssige Wiederholungen zu vermeiden, gemeinsam behandeln. Der Uebersichtlichkeit halber einerseits und der Natur der Aufgaben entsprechend andererseits fühlen wir uns jedoch gezwungen, die Resultate im Folgenden getrennt vorzuführen.

33. Die Art der Formänderung.

Die Art der Formänderung haben wir mittelst des Wirkungswinkels, d. h. mit Hilfe der Richtung der Kraftvermittlung bestimmt und sind bei den verschiedenen Beanspruchungen zu folgenden Resultaten gelangt.

a) Bei Zugbeanspruchung haben wir aus den Fig. 31—37, Taf. III erfahren

1. dass die gleichmässige Dehnung, d. h. diejenige, bei welcher der Reibungscoëfficient (f) einen wachsenden Werth hat, streng genommen zwar nur bei proportionalem Körper mit der Länge proportional ist, bei langen kreiscylindrischen Stäben jedoch, da bei diesen nur ein kleiner Theil in der Mitte des Stabes auf andere Art beansprucht wird, der Fehler sehr gering ist, wenn man die Dehnung mit der Länge proportional nimmt;

2. bei kurzen Stäben (Fig. 31, Taf. III) ist der Einfluss des abweichend beanspruchten Theiles so gross, dass bei diesen nur das allgemeine Gesetz giltig ist, d. h. die gleichmässige Dehnung ist nur bei proportionalen Körpern mit der Länge proportional;

3. dass das letztgenannte allgemeine Gesetz sich auch auf Stäbe mit nicht kreiscylindrischem Querschnitte bezieht (Fig. 30, Taf. III);

4. bezüglich der bildsamen Dehnung, bei welcher der Reibungscoëfficient (f) constant ist, haben wir gefunden, dass diese (Fig. 27, Taf. III) nur ein ($\delta \cdot \operatorname{ctg} \beta$) langer Stabtheil erleidet und dass als Folge dieser am Stabe Einschnürung, d. h. Contraction, sichtbar wird.

b) Bei Druckbeanspruchung fanden wir aus den Fig. 41—50 der Taf. VI folgende Resultate:

1. Innerhalb der Zähigkeitsgrenze, also so lange, bis die innere Reibung einen wachsenden Werth erhält, erleiden kurze und lange Stäbe nahezu gleichmässige Formänderung.

2. Innerhalb der Grenzen der Bildsamkeit, also während die innere Reibung einen constanten Werth beibehält, erleiden Bolzen, bei denen $\delta > 2D \cdot \operatorname{tg}\beta$ ist (Fig. 41 und 43), ungleich vertheilte Formänderung, indem die Endtheile der Bolzen sich in einer Länge von $D \cdot \operatorname{tg}\beta$ stauchen.

3. Bolzen, bei denen $\delta < 2D \cdot \operatorname{tg}\beta$ ist (Fig. 57), ändern ihre Form nahezu gleichförmig.

4. Versuchsstücke, bei denen $\delta < D \cdot \operatorname{tg}\beta$ ist (Fig. 46—47), ändern ihre Form ganz gleichförmig.

5. Aus den Fig. 45, 46 und 50 folgt, dass die äussere Kraft auf der Druckfläche nur so lange gleichmässig vertheilt sein kann, als $\delta > 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg}\beta$ ist. Sobald $\delta < 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg}\beta$ wird, wächst die Belastung der Druckfläche gegen die Mitte zu.

Aus den Fig. 44, 45, 46 und 47 kann man weiter noch folgern:

6. So lange $\delta > D \cdot \operatorname{tg}\beta$ ist, befinden sich unter der Druckfläche solche Theile, welche der Richtung des Werkzeuges folgen und es entsteht deshalb zwischen diesen und der Druckfläche keine Reibung.

7. Wenn $\delta < D \cdot \operatorname{tg}\beta$ wird, so bewegen sich unter der Druckfläche immer mehr und mehr Moleküle. Die Bewegung sämmtlicher Moleküle tritt ein, wenn $\delta < 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg}\beta$ ist, weshalb zwischen ihnen und der Druckfläche Reibung entsteht (Fig. 47—50).

c) Beim Scheeren sind es folgende bemerkenswerthe Resultate, die wir fanden:

1. Das Werkzeug kann am Rande des Stückes keine Scheerwirkung hervorbringen (Fig. 2—3, Taf. XX).

2. Das Werkzeug übt nur auf einen $\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ breiten Streifen Druck aus (Fig. 4, Taf. XX).

3. Der zwischen den Schneiden sich befindliche schräge Streifen *aebc* wird durch secundäre Kraftwirkung auf Zug beansprucht, folglich wird er spröde.

4. Durch Anwendung eines spitzen Schneidewinkels an der Scheere wird die Unebenheit der Schnittfläche geringer (Fig. 10, Taf. XX).

5. Bei zähem Material tritt an der freien Seite der Schnittfläche Einschnürung ein, während bei spröden Materialien die Kante scharf bleibt.

d) Beim Lochen ergab sich Folgendes:

1. Stempel und Lochring üben nur auf einem $\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ breiten Ringe Druck aus (Fig. 1, Taf. XXII).

2. Der Ring mit dem Querschnitte $acbe$ und $a_0c_0b_0e_0$, der sich zwischen der Kante des Stempels und Locbringes befindet, ist nur auf Zug beansprucht und wird spröde.

3. Nach den Fig. 4, 5, 6 der Taf. XXI wird die gelochte Platte, ganz unabhängig vom Stempeldurchmesser, vom Rande des Loches an gerechnet, in einem $(\delta \cdot \operatorname{ctg} \beta)$ breiten Ringe spröde.

4. Der ausgestanzte Theil wird, so lange $d > 4\delta \cdot \operatorname{ctg} \beta$ ist (Fig. 1—2, Taf. XXII), nur am Rande spröde, der innere Theil desselben bleibt aber unverändert.

5. Wenn $d < 4 \cdot \operatorname{ctg} \beta$ ist (Fig. 4—7, Taf. XX), so wird der ausgestanzte Theil in seiner ganzen Masse spröde.

6. Der Lochrand zeigt bei zähem Material Einschnürung, während er bei sprödem Material scharf begrenzt ist.

7. Wenn $d < 0{\cdot}5\delta \cdot \operatorname{ctg} \beta$ ist (Fig. 8, Taf. XX), so wird ein Lochen des Materials nicht mehr möglich und in diesem Falle erleiden zähe Materialien um das Werkzeug herum Strauchung.

34. Grösse der Kräfte, welche zur Formänderung nöthig ist.

Bei jeder Formänderung entsteht durch die Wirkung der äusseren Kraft Maassvergrösserung und Maassverkleinerung, weshalb man sagen kann, dass jede äussere Kraft zweierlei Wirkung ausübt, und zwar in der Richtung der Maassvergrösserung Schubwirkung, und in jener der Maassverminderung Druckwirkung.

Die Maassvergrösserung und Maassverminderung stehen im ursächlichen Zusammenhange, so dass man mit Hilfe der Beständigkeit des Volumens aus dem einen Werthe den anderen berechnen kann. Aus diesem Grunde braucht man bei Formänderungen nur einen Werth der Maassveränderung zu berücksichtigen.

Die Maassveränderungen stehen aber nicht nur unter einander, sondern auch mit den Wirkungen der äusseren Kraft in ursächlichem Zusammenhange, weshalb man auch nur eine, und zwar jene Kraftwirkung zu berücksichtigen hat, welche der in Betracht genommenen Maassveränderung entspricht.

In unseren Abhandlungen haben wir immer nur die Maassvergrösserung und deshalb auch nur die Schubwirkung in Betracht genommen.

Bezüglich der inneren Reibung wissen wir, dass diese sowie jede Reibung der Gleitung widersteht.

Bei Formänderungen gleiten die Moleküle in zwei Richtungen, d. h. in der Richtung der Maassvergrösserung und in jener der Maassverminderung, weshalb man sich die innere Reibung auch in zwei Theile getrennt vorstellen muss, deren einer der Gleitung in der Richtung der Maassvergrösserung, der andere jener in der Richtung der Maassverminderung widersteht.

Diese Theile der inneren Reibung stehen ebenfalls in ursächlichem Zusammenhange, weshalb wir in unseren Abhandlungen nur jenen Theil in Betracht nahmen, welcher der Gleitung in der Richtung der Maassvergrösserung widersteht, und nannten diesen kurzweg innere Reibung (*Nf*).

Aus diesem Grunde konnten wir in unseren Abhandlungen sagen, dass die innere Reibung immer nur der Schubwirkung der äusseren Kraft widersteht, und konnten deshalb dessen Werth aus der Zugbeanspruchung oder aus der Druckbeanspruchung berechnen.

Den berechneten Werth der inneren Reibung haben wir als Ordinaten in einem solchen Diagramme aufgetragen, dessen Abscisse die procentuale gleichmässige Dehnung ist. Mit Hilfe solcher Diagramme der inneren Reibung kann man die nöthige Kraft und den Arbeitsverbrauch jederartigen Beanspruchung bestimmen.

Aus dem Diagramme der inneren Reibung folgt, und durch Versuche wurde nachgewiesen, dass der Werth der inneren Reibung bei demselben Material nur von der relativen Lage der Moleküle, also von der Art der Beanspruchung unabhängig ist.

Weitere abgeleitete und durch Versuche bestärkte Resultate sind folgende:

1. Bei zähen Materialien vermindert jede Formänderung die Zähigkeit, diese werden hierdurch spröder gemacht; die innere Reibung derselben, also auch die mit dieser im Zusammenhang stehende Elasticitätsgrenze und Härte des Materials werden hierbei vergrössert.

2. Durch Ausglühen vermindert sich die Grösse der inneren Reibung, also auch die Elasticitätsgrenze und Härte; die Zähigkeit des Materials wird also wieder vergrössert.

3. Die innere Reibung ist das Maass der Härte.

4. Bei bildsamen Materialien — nachdem der Reibungscoëfficient hier constant ist — ändern sich die Eigenschaften des Materials bei Formänderung durchaus nicht.

Ausser den erwähnten allgemeinen Folgerungen wäre bei den einzelnen Beanspruchungen noch Folgendes zu bemerken:

a) Bei Zug fanden wir

1. dass bei ein und demselben und im gleichen Zustande sich befindlichen Material, so lange es noch Zähigkeit besitzt, bei längeren Stäben die äussere Kraft mit dem Querschnitte im Allgemeinen als proportional zu betrachten ist;

2. bei kurzen Stäben gilt diese Proportionalität nur bei proportionalen Körpern;

3. die Grösse der Zugkraft ergiebt sich bei zähen Materialien, wenn man den veränderten Querschnitt mit der betreffenden inneren Reibung multiplicirt.

b) Beim Drücke haben wir die äussere Kraft nur für jene Fälle bestimmt, wo die Formänderung ziemlich gleichmässig ist, d. h. wenn $\delta < 2D \cdot \operatorname{tg}\beta$ ist. Bezüglich der Kraftvertheilung fanden wir, dass

1. so lange $\delta > 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg}\beta$ ist (Fig. 46, Taf. VI), diese gleichförmig ist; wenn aber

2. $\delta < 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg}\beta$ ist (Fig. 50, Taf. VI), so wird die Vertheilung der Kraft ungleichmässig und gegen die Mitte zu grösser.

Die Grösse der Druckkraft wird, wenn $\delta > 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg}\beta$ ist, innerhalb der Grenzen, wo das Material Zähigkeit besitzt, gleich den veränderten Querschnitt multiplicirt mit $\operatorname{tg}\beta$ und mit jenem Werthe der inneren Reibung, welcher der procentualen Dehnung des Durchmessers entspricht.

Bei der bildsamen Formänderung ist die Grösse der Druckkraft: Den veränderten Querschnitt multiplicirt mit $\operatorname{tg}\beta$ und mit dem constanten maximalen Werth der inneren Reibung.

Sobald $\delta < 0{\cdot}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg}\beta$ ist, nimmt der Kraftbedarf rasch zu.

c) Beim Scheeren haben wir gefunden:

1. Der meisten Kraft bedarf die Scheere mit parallelen Schneiden und rechtwinkeligem Schneidewinkel.

2. Die geringste Kraft benöthigt die Scheere mit schiefer Schneide und spitzem Schneidewinkel.

Bei der Berechnung der Kraft nahmen wir nur deren maximalen Werth in Betracht und fanden, dass dieser im ersten Falle mit der Scheerfläche und mit der maximalen Härte, im zweiten Falle mit dem Quadrate der Plattenstärke und der maximalen Härte proportional ist.

d) Beim Lochen endlich ergab sich, dass die äussere Kraft, wenn $d > 2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ ist, mit der Stärke der Platte, mit dem Durchmesser des Stempels und mit der maximalen Härte proportional ist; während, wenn $d < 2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ ist, die beim Lochen nöthige Kraft geringer ist.

In nachfolgender Tabelle (Seite 95) sind der leichteren Uebersicht wegen die Formeln der äusseren Kraft zusammengefasst.

Mit den Formeln dieser Tabelle können wir nicht nur den Kraftbedarf berechnen, sondern auch das Verhältniss der verschiedenen Beanspruchungen zueinander darstellen.

Aus der Formel für die Zug- und Scheerkraft z. B. folgt das Verhältniss der Reiss- und Scheerkraft und zwar bei Scheeren, wo parallele Schneiden und $\angle \alpha = 90^0$ vorausgesetzt sind, dass

$$\frac{P}{Q} - \frac{\frac{\delta \cdot b}{1+\lambda}}{\frac{\delta \cdot b}{1+\lambda}} \cdot \frac{Nf_{\max}}{Nf_{\max} \cdot \sin\beta} = \frac{1}{\sin\beta}$$

oder

$$P \cdot \sin\beta = Q.$$

Tabelle der Kraftformeln.

Art der Beanspruchung	Bedingung	Formel für die Kraft	Formel für die Coëfficienten
Zug	$h > n\delta \operatorname{ctg}\beta$	$P_{\max} = \frac{\delta \cdot b}{1+\lambda} \cdot Nf_{\max} = \frac{\Delta}{1+\lambda} \cdot Nf_{\max}$	—
Druck	$\delta < 2D \operatorname{tg}\beta$	$Q_1 = \Delta_1 \cdot Nf_1 \cdot \operatorname{tg}\beta$	—
	$\delta > 0{\cdot}_5 D \operatorname{tg}\beta$	$Q_1 = \Delta \cdot (1+\lambda_1)^2 \cdot Nf_1 \cdot \operatorname{tg}\beta$	
	$\delta < 0{\cdot}_5 D \operatorname{tg}\beta$	$Q_1 = \Delta_1 \cdot Nf_1 \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot Z_1$ $Q_1 = \Delta \cdot (1+\lambda_1)^2 \cdot Nf_1 \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot Z_1$	$Z_1 = 1 + \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 \cdot y + + \left(\frac{n-4}{n}\right)^2 \cdot y^2 + \cdots$ $n = \frac{D}{\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta}$
Scheeren	$\varphi = 0$ $\alpha = 90^0$	$Q_{\max} = \frac{\delta \cdot b}{1+\lambda} \cdot Nf_{\max} \cdot \sin\beta$	—
	$\varphi = 0$ $\alpha < 90^0$	$Q_{\max} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{\delta \cdot b}{1+\lambda} \cdot Nf_{\max} \cdot \sin\beta \cdot A$	$A = 1 - 2 \operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{ctg}\alpha$
	$\varphi > 0$ $\alpha < 90^0$ $b > \Theta\delta$	$Q_{\max} = \frac{1}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\varphi} \cdot \frac{\delta^2}{1+\lambda} \cdot Nf_{\max} \cdot \sin\beta \cdot A \cdot \Theta$	$\Theta = \operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{ctg}\varphi \cdot 0{\cdot}_{611}\sqrt{\lambda + \varkappa(1+\lambda)}$
	$\varphi > 0$ $\alpha < 90^0$ $b < \Theta\delta$	$Q_{\max} = \frac{1}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\varphi} \cdot \frac{\delta \cdot b}{1+\lambda} Nf_{\max} \cdot \sin\beta \cdot A$	—
Lochen	$d > 2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$	$Q_{\max} = \frac{\delta \cdot d\pi}{1+\lambda} \cdot Nf_{\max} \cdot \sin\beta$	—
	$d < 2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$ $d \geqq \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta$	$Q_{\max} = \frac{\delta \cdot d\pi}{1+\lambda} \cdot Nf_{\max} \cdot \sin\beta \cdot C$	$C = 0{\cdot}_5 + \frac{d}{2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta} - 0{\cdot}_5 \left(\frac{d}{2\delta \cdot \operatorname{ctg}\beta}\right)^2$

Die Scheerkraft ist also gleich der Reisskraft multiplicirt mit $\sin\beta$.

In gleicher Weise können wir mit den übrigen Beispielen verfahren.

Die Versuchsresultate sind bezüglich der Zug- und Druckversuche auf den Taf. VII—XIX, die der Scheer- und Druckversuche auf den mit gleichem Titel versehenen Tabellen mitgetheilt.

Aus der Vergleichung dieser Resultate ergiebt sich, dass die berechneten Werthe der absoluten Eigenschaften der Materialien sich nur innerhalb kleiner Grenzen bewegen.

Diese Werthe sind der klareren Uebersicht wegen in folgender Tabelle auf Seite 97 zusammengestellt.

Aus der Tabelle, welche die charakteristischen Eigenschaften des Materials enthält, ist ersichtlich, dass wir in jenen Fällen, wo wir bei unseren Berechnungen den Wirkungswinkel β und die maximale gleichmässige Dehnung λ constant nahmen, für die maximale innere Reibung Grenzwerthe bekommen haben. Diese Grenzwerthe zeigen aber nach unserer hierauf bezüglichen Tabelle nur geringe Abweichungen. Wir können also diese Abweichungen auf Rechnung der Ungleichmässigkeit der Materialien schreiben, weshalb ich hoffe, dass ich mit dem Gesagten auf die Anwendbarkeit des Princips der inneren Reibung und der von mir benutzten Art der Kraftvermittlung genügend hingewiesen und klargestellt habe.

VI. Analytische Ableitungen.

35. Formel der inneren Reibung und der Zähigkeit.

Der Ausgangspunkt unserer bisherigen Folgerungen war die innere Reibung. Mit Hilfe dieser konnten wir in gegebenen Fällen die Grösse der äusseren Kraft bestimmen und hiermit das Schaubild graphisch darstellen.

Da aber die graphische Methode sich oft als sehr zeitraubend erweist, so ist es zweckmässig, neben dieser auch die analytischen Formeln der Kraft, besonders aber der Arbeit zu kennen.

Die Kenntniss dieser Formeln zeigt sich schon bei den Beanspruchungen ersten und zweiten Grades als wünschenswerth, bei Beanspruchungen höheren Grades jedoch (z. B. beim Biegen) sind sie unentbehrlich und deshalb wollen wir uns im Nachfolgenden mit der Ableitung dieser analytischen Formeln befassen.

Die Curven der Schaubilder der inneren Reibung, die in Fig. 3 der Taf. VII—XIX mit Nf bezeichnet sind, entsprechen einer Parabel, deren Scheitelpunkt sich am Endpunkte der anfänglichen Härte (Nf_0) befindet.

Wenn wir annehmen, dass der Anfangspunkt der Coordinatenaxen mit dem Anfangspunkte des Schaubildes zusammenfällt, so ist die Formel dieser Parabel:

$$(y - Y_0)^2 = 2px,$$

Tabelle über die charakteristischen Eigenschaften der untersuchten Materialien.

Benennung des Versuchsmaterials	Analyse	β	λ	$\varkappa$	Maximale Härte Nf_{max}	Materialgruppe	Anmerkung
Blei (gegossen)	Pb	58°	$0{\cdot}_{27}$	$1{\cdot}_{57}$	$2{\cdot}_{05}-2{\cdot}_{5}$	V.	—
Zinn (gegossen)	Sn	61°	$0{\cdot}_{174}$	$4{\cdot}_{56}$	$2{\cdot}_{17}-2{\cdot}_{8}$	V.	—
Aluminium	Al	54°	$0{\cdot}_{20}$	von 0 bis $3{\cdot}_{6}$	$10{\cdot}_{58}$	V.	Wurde nicht gescheert und konnte deshalb der Werth von $\varkappa$ nicht controllirt werden.
Kupfer	Cu	54° 30′	$0{\cdot}_{25}$	von $0{\cdot}_{08}$ bis $2{\cdot}_{5}$	$24-26{\cdot}_{3}$	V.	Beim Scheeren gelangte der niedrigste Werth von $\varkappa$ zur Geltung.
Prima-Kesselblech .	$C=0{\cdot}_{11}$ $Mn=0{\cdot}_{54}$ $Si=0{\cdot}_{056}$ $P=0{\cdot}_{019}$	56° 30′	$0{\cdot}_{17}$	$0{\cdot}_{84}$	$36-37{\cdot}_{5}$ (nur bei zwei Versuchen 33)	V.	Sämmtliche Analysen verdanke ich der Freundlichkeit des Herrn J. Kail, Montan-Ingenieur bei Ganz & Comp. in Budapest.
Secunda-Kesselblech	$C=0{\cdot}_{11}$ $Mn=0{\cdot}_{58}$ $Si=0{\cdot}_{033}$ $P=0{\cdot}_{041}$	54°	$0{\cdot}_{175}$	von ? bis $0{\cdot}_{688}$	$35{\cdot}_{7}-39{\cdot}_{7}$	V.	
Messingblech von 18 mm Stärke . . .	$Cu=62{\cdot}_{11}$ $Zn=37{\cdot}_{89}$	59°	$0{\cdot}_{24}$	0	29	VI.	Bei Zug $\lambda=0{\cdot}_{15}$ „ $Nf_{max}=24{\cdot}_{0}$
Messingblech von 15 mm Stärke . . .	$Cu=62{\cdot}_{82}$ $Zn=31{\cdot}_{81}$	48°	$0{\cdot}_{8}$	0	46—51	VI.	Bei Zug $\lambda=0{\cdot}_{16}$ „ $Nf_{max}=43$
Messingblech von 12, 10 und 5 mm Stärke	$Cu=67{\cdot}_{35}$ $Zn=32{\cdot}_{58}$	48°	$0{\cdot}_{23}$	0	$55{\cdot}_{5}-58{\cdot}_{5}$	VI.	Bei Zug $\lambda=0{\cdot}_{05}$ „ $Nf_{max}=48$
Deltametall	Wurde nicht analysirt	54°	$0{\cdot}_{182}$	von 0 bis $1{\cdot}_{67}$	45—50	VI.	Bei Zug $\lambda=0{\cdot}_{25}$ „ $Nf_{max}=60{\cdot}_{2}$
Zink (gegossen)	Zn	50°	$0{\cdot}_{1}$	0	$15{\cdot}_{7}-16{\cdot}_{8}$ (bei Scheeren $11{\cdot}_{3}$)	mit combinirten Reibungscoëfficienten I+IV.	Bei Zug $\lambda=0$ „ $p_0=2{\cdot}_{3}$
Graues Gusseisen . .	Wurde nicht analysirt	53	$0{\cdot}_{1}$	0	50—66 (bei Scheeren 24)	mit combinirten Reibungscoëfficienten I+IV.	

Der Grund der Verschiedenheit der Werthe bei den verschiedenen Beanspruchungen liegt wahrscheinlich in der krystallinischen Form des Zinkes.

wo $$Y_0 = Nf_0$$
$$y = Nf_1$$
und $2p$ der doppelte Parameter, also eine auf dem Versuchswege zu bestimmende Constante bedeutet.

Die Formel der inneren Reibung ist daher

$$Nf_1 = Nf_0 + \sqrt{2p\lambda_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1.$$

Die Schaubilder der Metalle zeigen eine fast rein parabolische Curve, nur das Schaubild des Flusseisens besitzt bei seinem Beginne eine Inflexion, weshalb die Aenderung der inneren Reibung desselben der obigen Formel nicht vollkommen entspricht. Nachdem aber die weiteren Punkte des Schaubildes jenen der Parabel entsprechen und die Differenz der Anfangspunkte gering ist, so kann man auch hier, folglich im Allgemeinen, bei allen Metallen diese Formel als entsprechend annehmen.

Auf Grund der Formel 1. ist der Werth der maximalen Härte:

$$Nf_{\max} = Nf_0 + \sqrt{2p\lambda_z}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1a.$$

worin λ_z die maximale procentuale Dehnung der Zähigkeit bedeutet. Wir haben diese Dehnung bisher nur kurz mit λ bezeichnet, nachdem wir aber bei dem analytischen Verfahren verschiedene Dehnungen zu unterscheiden haben, wollen wir diese d. h. die der Zähigkeit entsprechende mit λ_z bezeichnen.

Als Grad der Zähigkeit dient jene Fläche des Schaubildes der inneren Reibung, welche durch $Nf_{\max}$ begrenzt ist.

Den Zahlenwerth dieser Fläche erhalten wir, wenn wir den differentialen Werth derselben, zwischen bestimmten Grenzen integriren.

Der differentiale Werth der Fläche ergiebt sich, wenn wir die in $\lambda_1 = x$ befindliche Ordinate $(Nf_x = Nf_0 + \sqrt{2px})$ mit dem differentialen Werth der Abscisse $d\lambda = dx$ multipliciren.

Es ist also:

$$da = Nf_x \cdot dx = Nf_0 \cdot dx + \sqrt{2p} \cdot \sqrt{x} \cdot dx$$

und hiervon die bestimmten Integrale von $x = 0$ bis $x = \lambda_x$ genommen, ist

$$a = Nf_0 \int_0^{\lambda_z} dx + \sqrt{2p} \cdot \int_0^{\lambda_z} \sqrt{x} \cdot dx,$$

folglich

$$a = Nf_0 \cdot \lambda_x + \tfrac{2}{3} \sqrt{2p} \cdot \lambda^{3/2}$$

oder

$$a^{\text{mkg}}_{\text{pro cm}^3} \quad Nf_0 \cdot \lambda_z + 0{\cdot}666 \sqrt{2p\lambda_z^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2.$$

die Formel der Zähigkeit.

Wenn wir den Zahlenwerth der Formel 2. in mkg wünschen, müssen wir annehmen, dass das Schaubild die Zähigkeit eines solchen Stabes bedeutet, dessen Querschnitt 1 mm² und dessen Länge 1 m ist, folglich ist dessen Rauminhalt 1 cm³.

Wenn wir aus der Zähigkeit den Hartig'schen Arbeitsmodul berechnen wollen, müssen wir vorerst die Zähigkeit eines Stabes von 1 dm³ Rauminhalt ausdrücken, d. h. die nach Formel 2 erhaltene Zahl 1000-fach nehmen und dann mit dem specifischen Gewichte (γ) dividiren.

Es ist also:

$$A^{\text{mkg}}_{\text{pro dm}^3} = 1000 \cdot a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3.$$

und

$$A^{\text{mkg}}_{\text{pro kg}} = \frac{1}{\gamma} \cdot A^{\text{mkg}}_{\text{pro dm}^3} = \frac{1000 \cdot a^{\text{mkg}}_{\text{pro cm}^3}}{\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4.$$

Die Formeln 1. und 2. ergeben bei den untersuchten Materialien, Blei, Zinn und Zink ausgenommen, vollkommen übereinstimmende Resultate. Bei genannten drei Metallen konnte bei dem graphischen Verfahren die anfängliche Härte nicht genau bestimmt werden, weil der anfängliche Theil der Schaubilder (siehe Fig. 1 *P*, Taf. VII, VIII und Fig. 2, Taf. XIX) nicht klar genug ist. Was dort unmöglich war, kann mit Hilfe der Formel 1. erreicht werden.

Es ergab sich durch diese Berechnung, dass

bei Blei der Werth von $Nf_0 = 0{\cdot}73$ ist anstatt $0{\cdot}9$
„ Zinn „ „ „ $Nf_0 = 1{\cdot}15$ „ „ $0{\cdot}91$
„ Zink „ „ „ $Nf_0 = 4{\cdot}6$ „ „ $1{\cdot}5$.

Mit Hilfe der Formel 1. habe ich auch den Werth von $2p$ für jedes untersuchte Material bestimmt, und theile ich diese Werthe in nachfolgender Tabelle mit, in welcher ich auch die berechneten Werthe der anfänglichen Härte oder Elasticitätsgrenze (Nf_0), der maximalen Härte ($Nf_{\max}$), und schliesslich die Rechnungswerthe der Zähigkeit, und die mittelst Planimeter bestimmten Werthe der Fläche des Schaubildes der inneren Reibung aufnahm, um über die Brauchbarkeit der Formel 1. und 2. einen Ueberblick geben zu können.

Benennung des Versuchsmaterials	$2p$	λ_z	Nf_0	$Nf_{\max}$	a^{mkg}	
					Plan. W.	Rechn.-W.
Blei	6	$0{\cdot}_{27}$	$0{\cdot}_{73}$	2	$0{\cdot}_{420}$	$0{\cdot}_{420}$
Zinn	6	$0{\cdot}_{174}$	$1{\cdot}_{15}$	$2{\cdot}_{17}$	$0{\cdot}_{317}$	$0{\cdot}_{318}$
Aluminium	300	$0{\cdot}_{2}$	$3{\cdot}_{01}$	$10{\cdot}_{76}$	$1{\cdot}_{65}$	$1{\cdot}_{630}$
Kupfer	900	$0{\cdot}_{25}$	$11{\cdot}_{40}$	$26{\cdot}_{4}$	$5{\cdot}_{200}$	$5{\cdot}_{290}$
Prima-Kesselblech	1800	$0{\cdot}_{17}$	$18{\cdot}_{63}$	36	$5{\cdot}_{0}$	$5{\cdot}_{12}$
Secunda-Kesselblech	1000	$0{\cdot}_{175}$	26	$39{\cdot}_{2}$	$6{\cdot}_{000}$	$6{\cdot}_{090}$
Messingblech von 18 mm Stärke	600	$0{\cdot}_{24}$	15	27	$5{\cdot}_{600}$	$5{\cdot}_{500}$
Messingblech von 15 mm Stärke	1550	$0{\cdot}_{295}$	$26{\cdot}_{6}$	48	$11{\cdot}_{900}$	$12{\cdot}_{000}$
Messingblech von 12 mm Stärke	800	$0{\cdot}_{23}$	$43{\cdot}_{6}$	$57{\cdot}_{1}$	$11{\cdot}_{600}$	$11{\cdot}_{700}$
Deltametall	5000	$0{\cdot}_{132}$	$23{\cdot}_{6}$	$49{\cdot}_{3}$	$5{\cdot}_{3}$	$5{\cdot}_{480}$
Zink	1800	$0{\cdot}_{08}$	$4{\cdot}_{6}$	$16{\cdot}_{6}$	$1{\cdot}_{100}$	$0{\cdot}_{992}$
Graues Gusseisen	3000	$0{\cdot}_{1}$	49	$66{\cdot}_{3}$	$6{\cdot}_{200}$	$6{\cdot}_{050}$

Um über die Abstufung einzelner charakteristischen Eigenschaften einen Ueberblick geben zu können, habe ich nachfolgende vier Tabellen zusammengestellt.

Abstufung der Elasticitätsgrenze.	
Benennung des Versuchsmaterials	Nf_0
Graues Gusseisen (bei Druck) .	49
Messingblech (12 mm)	$43{\cdot}_{6}$
Messingblech (15 mm)	$26{\cdot}_{6}$
Secunda-Kesselblech	26
Deltametall	$23{\cdot}_{6}$
Prima-Kesselblech	$18{\cdot}_{63}$
Messingblech (18 mm)	15
Kupfer	$11{\cdot}_{4}$
Zink (bei Druck)	$4{\cdot}_{6}$
Aluminium	$3{\cdot}_{01}$
Zinn	$1{\cdot}_{15}$
Blei	$0{\cdot}_{73}$

Abstufung der Härte.	
Benennung des Versuchsmaterials	Nf_{max}
Graues Gusseisen (bei Druck) .	$66{\cdot}_{3}$
Messingblech 12 mm (bei Druck)	$57{\cdot}_{1}$
Deltametall	$49{\cdot}_{3}$
Messingblech 15 mm (bei Druck)	48
Secunda-Kesselblech	$39{\cdot}_{2}$
Prima-Kesselblech	36
Messingblech 18 mm (bei Druck)	27
Kupfer	$26{\cdot}_{4}$
Zink (bei Druck)	$16{\cdot}_{6}$
Aluminium	$10{\cdot}_{7}$
Zinn	$2{\cdot}_{17}$
Blei	2

Abstufung der Zähigkeit.*)	
Benennung des Versuchsmaterials	$a^{\text{mkg}}_{\text{pro cm}^3}$
Messingblech 15 mm (bei Druck)	$12{\cdot}_{000}$
Messingblech 12 mm (bei Druck)	$11{\cdot}_{700}$
Secunda-Kesselblech	$6{\cdot}_{090}$
Graues Gusseisen (bei Druck) .	$6{\cdot}_{050}$
Messingblech 18 mm (bei Druck)	$5{\cdot}_{500}$
Deltametall	$5{\cdot}_{480}$
Prima-Kesselblech	$5{\cdot}_{480}$
Kupfer	$5{\cdot}_{290}$
Aluminium	$1{\cdot}_{630}$
Zink (bei Druck)	$0{\cdot}_{992}$
Blei	$0{\cdot}_{420}$
Zinn	$0{\cdot}_{318}$

Abstufung des Arbeitsmoduls.	
Benennung des Versuchsmaterials	$A^{\text{mkg}}_{\text{pro kg}}$
Messingblech 15 mm (bei Druck)	1400
Messingblech 12 mm (bei Druck)	1360
Graues Gusseisen (bei Druck) .	850
Secunda-Kesselblech	790
Prima-Kesselblech	715
Messingblech 18 mm (bei Druck)	640
Deltametall	638
Aluminium	600
Kupfer	592
Zink (bei Druck)	143
Zinn	43
Blei	37

Wir wollen nun auf die Bestimmung der Kraft- und Arbeitsformel der Beanspruchungen ersten und zweiten Grades übergehen.

36. Formel der Zugbeanspruchung.

In Punkt 12, Seite 19 haben wir für die Zugkraft bei längeren Stäben aus zähem Material folgende Formel erhalten:

$$P_1 = A \cdot \frac{Nf_1}{1 + \lambda_1}.$$

*) Die Zähigkeit ist nicht zu verwechseln mit der Bildsamkeit. So lange das Material Zähigkeit besitzt, widersteht die ganze Construction den dynamischen Beanspruchungen, wenn aber das Material nur Bildsamkeit besitzt, erleidet die Construction örtliche Deformation.

Wenn wir in dieser anstatt Nf_1 dessen analytische Formel 1. substituiren, erhalten wir für die Zugkraft folgende Formel:

$$P_1 = \Delta \cdot \frac{Nf_0 + \sqrt{2p\lambda_1}}{1 + \lambda_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5.$$

und für die maximale Zugkraft

$$P_{max} = \Delta \cdot \frac{Nf_0 + \sqrt{2p\lambda_z}}{1 + \lambda_z} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5a.$$

Formel 5. ist also die Gleichung jener Curven, welche in den Fig. 1 der Taf. VII—XIX mit P bezeichnet sind.

Um den Werth der Flächen dieser Schaubilder, d. h. die Arbeit der Zugkraft zu erhalten, müssen wir vorerst deren differentialen Werth bilden, der sich ergiebt, wenn wir die bei $\lambda_1 = x$ entsprechende Zugkraft mit dem differentialen Werth des Weges multipliciren. Da aber der Weg nach Seite 19 $s = \lambda h$ ist, so wird

$$ds = h \cdot dh = h \cdot dx$$

sein, folglich

$$da = P_x \cdot ds = \Delta \cdot \frac{Nf_0 + \sqrt{2px}}{1 + x} \cdot h \cdot dx.$$

Hieraus ergiebt sich der ganze Werth der Fläche, wenn man obigen Ausdruck zwischen den bestimmten Grenzen von $x = 0$ bis $x = \lambda_z$ integrirt.

Es ist also:

$$a = \Delta \cdot h \left[Nf_0 \int_0^{\lambda_z} \frac{dx}{1+x} + \sqrt{2p} \int_0^{\lambda_z} \frac{\sqrt{x}}{1+x}\, dx \right].$$

Die Werthe der hier vorkommenden Integrale sind:

$$\int_0^{\lambda_z} \frac{dx}{1+x} = ln\,(1+\lambda_z) = 2{\cdot}3 \lg (1+\lambda_z),$$

und wenn

$$\sqrt{x} = y$$
$$x = y^2$$
$$dx = 2y\,dy$$

genommen wird, so ist

$$\int_0^{\lambda_z} \frac{\sqrt{x}}{1+x}\, dx = 2 \int_0^{\lambda_z} \frac{y^2\,dy}{1+y^2} = 2\,[y - \operatorname{arc\,tg} y]_0^{\lambda_z} = 2\,(\sqrt{x} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x})_0^{\lambda_z} =$$
$$= 2\,(\sqrt{\lambda_z} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\lambda_z}).$$

Diese Werthe substituirt, erhalten wir für die Zugarbeit bis zur maximalen Zugkraft folgende Formel:

$$a^{mkg} = \Delta^{mm^2} \cdot h^m \left[Nf_0 \cdot 2{\cdot}3 \lg (1+\lambda_z) + 2\sqrt{2p}\,(\sqrt{\lambda_z} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\lambda_z}) \right] . \quad . \quad 6.$$

in welcher

$$\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\lambda_z} = \operatorname{arc} \alpha^0 = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha \text{ und } \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\lambda_z} \text{ ist.}$$

Diese Formel ergiebt die Zugsarbeit in mkg, wenn man Δ in mm² und h in Metern nimmt.

Um die Richtigkeit der Formel 6. beurtheilen zu können, habe ich in nachfolgender Tabelle sowohl die Rechnungs- als auch die planimetrischen Werthe zusammengestellt.

Benennung des Versuchsmaterials	Δ^{mm^2}	h^m	λ	a^{mkg}	
				Planimetr. Werthe	Rechnungs-Werthe
Blei	498	$0{\cdot}_{15}$	$0{\cdot}_{27}$	$28{\cdot}_{1}$	$27{\cdot}_{6}$
Zinn	498	$0{\cdot}_{15}$	$0{\cdot}_{174}$	$22{\cdot}_{5}$	$21{\cdot}_{9}$
Aluminium	$7{\cdot}_{25}$	$0{\cdot}_{1}$	$0{\cdot}_{2}$	$1{\cdot}_{08}$	$1{\cdot}_{076}$
Kupfer	$37{\cdot}_{4}$	$0{\cdot}_{07}$	$0{\cdot}_{25}$	$12{\cdot}_{08}$	$12{\cdot}_{45}$
Prima-Kesselblech	666	$0{\cdot}_{182}$	$0{\cdot}_{17}$	571	577
Secunda-Kesselblech	543	$0{\cdot}_{1035}$	$0{\cdot}_{175}$	326	316
Messing von 18 mm Stärke . .	$37{\cdot}_{3}$	$0{\cdot}_{07}$	$0{\cdot}_{14}$	$7{\cdot}_{05}$	$7{\cdot}_{02}$
Messing von 15 mm Stärke . .	$37{\cdot}_{3}$	$0{\cdot}_{07}$	$0{\cdot}_{16}$	$14{\cdot}_{3}$	$14{\cdot}_{09}$
Messing von 12 mm Stärke . .	40	$0{\cdot}_{07}$	$0{\cdot}_{05}$	$6{\cdot}_{27}$	$6{\cdot}_{7}$
Deltametall	$38{\cdot}_{5}$	$0{\cdot}_{07}$	$0{\cdot}_{25}$	$28{\cdot}_{5}$	$28{\cdot}_{4}$

37. Formeln der Druckbeanspruchung.

In Punkt 23, Seite 57 haben wir für die Druckkraft, im Falle

$$\delta > 0{\cdot}5\, D \operatorname{tg}\beta$$

ist, bei der Zähigkeit die Formel:

$$Q_1 = \Delta (1+\lambda_1)^2 N f_1 \operatorname{tg}\beta$$

und bei der Bildsamkeit:

$$Q_1 = \Delta (1+\lambda_1)^2 N f_{max} \operatorname{tg}\beta$$

erhalten.

Wenn wir in diesen Formeln anstatt Nf_1 und Nf_{max} den Werth der Formel 1. substituiren, erhalten wir die analytischen Formeln der Druckkraft.

Diese ist also bei der Zähigkeit, so lange $\lambda_1 \leqq \lambda_z$ ist:

$$Q_1 = \Delta (1+\lambda_1)^2 (Nf_0 + \sqrt{2p\lambda_1}) \operatorname{tg}\beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7.$$

an der Grenze der Zähigkeit:

$$Q_z = \Delta (1+\lambda_z)^2 (Nf_0 + \sqrt{2p\lambda_z}) \operatorname{tg}\beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7a.$$

und bei der Bildsamkeit, wo $\lambda_1 > \lambda_z$ ist:

$$Q = \Delta (1+\lambda_1)^2 (Nf_0 + \sqrt{2p\lambda_z}) \operatorname{tg}\beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 8.$$

Die Formeln 7. und 8. sind die Gleichungen jener Curven der Druckkraft, die in Fig. 4 der Taf. VII—XIX mit Q bezeichnet sind.

Um die Druckarbeit zu gewinnen, müssen wir vorerst deren differentialen Werth bilden.

Da im Schaubilde der Druckkraft der Weg, d. h. die Abscisse die Verminderung der Höhe bedeutet, d. h.

$$s = \delta - \delta_1 = \delta - x,$$

so wird dessen differentiale Werth

$$ds = -dx \text{ sein.}$$

Nachdem aber in den Kraftformeln (7. und 8.) die Variable nicht δ, sondern λ ist, so müssen wir die Kraftformeln so umändern, dass auch in diesen die Variable δ sei.

Aus der Beständigkeit des Volumens folgt, dass

$$\Delta\,\delta = \Delta_1\,\delta_1 = \Delta\,(1+\lambda_1)^2\,\delta_1$$

hieraus ergiebt sich, dass

$$\frac{\delta}{\delta_1} = (1+\lambda_1)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 9.$$

und

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\delta}{\delta_1}} - 1 \text{ ist} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 9a.$$

Diese Werthe in Formeln 7. und 8. substituirt, erhalten wir für die Druckkraft bei der Zähigkeit die Formel:

$$Q_1 = \frac{\Delta\,\delta}{\delta_1}\left[Nf_0 + \sqrt{2p\left(\sqrt{\frac{\delta}{\delta_1}} - 1\right)}\right]\operatorname{tg}\beta \quad \ldots\ldots 7b.$$

und bei der Bildsamkeit

$$Q_1 = \frac{\Delta\,\delta}{\delta_1}\left[Nf_0 + \sqrt{2p\left(\sqrt{\frac{\delta}{\delta_2}} - 1\right)}\right]\operatorname{tg}\beta \quad \ldots\ldots 8b.$$

wo $\delta_1 = x$ zu nehmen ist.

Mit Hilfe dieser Formel können wir den differentialen Werth der Druckarbeit schon ausdrücken.

Dieser ist bei der Zähigkeit:

$$da = Q_x \cdot ds = -\Delta\,\delta\operatorname{tg}\beta\left[Nf_0\,\frac{dx}{x} + \sqrt{2p}\sqrt{\sqrt{\frac{\delta}{x}} - 1}\cdot\frac{dx}{x}\right].$$

Wenn wir diesen Ausdruck zwischen den bestimmten Grenzen von $x = \delta$ bis $x = \delta_1$ integriren, erhalten wir die Formel der gesammten Druckarbeit bei der Zähigkeit:

$$a = -\Delta\,\delta\operatorname{tg}\beta\left[Nf_0\int_{\delta}^{\delta_1}\frac{dx}{x} + \sqrt{2p}\int_{\delta}^{\delta_1}\sqrt{\sqrt{\frac{\delta}{x}} - 1}\cdot\frac{dx}{x}\right].$$

Diese Formel kann man auch folgendermassen schreiben:

$$a = +\Delta\,\delta\operatorname{tg}\beta\left[Nf_0\int_{\delta_1}^{\delta}\frac{dx}{x} + \sqrt{2p}\int_{\delta_1}^{\delta}\sqrt{\sqrt{\frac{\delta}{x}} - 1}\cdot\frac{dx}{x}\right].$$

Die Werthe der hier vorkommenden Integrale sind:

$$\int_{\delta_1}^{\delta}\frac{dx}{x} = ln\,\frac{\delta}{\delta_1} = 2{\cdot}3\,\lg\frac{\delta}{\delta_1}$$

und wenn

$$\sqrt{\frac{\delta}{x}} = y$$

$$\frac{\delta}{x} = y^2 \quad \text{oder} \quad x = \frac{\delta}{y^2}$$

und

$$-\frac{\delta\, dx}{x^2} = 2y\, dy,$$

beziehungsweise

$$dx = -\frac{2y\, dy}{\delta} \cdot x^2 = -\frac{2\delta\, dy}{y^3},$$

so ist

$$\int_{\delta_1}^{\delta} \sqrt{\sqrt{\frac{\delta}{x}} - 1} \cdot \frac{dx}{x} = -2\int_{\delta_1}^{\delta} \frac{\sqrt{y-1}}{y}\, dy,$$

ferner wenn noch

$$\begin{aligned} \sqrt{y-1} &= v \\ y-1 &= v^2 \\ y &= v^2 + 1 \\ dy &= 2v\, dv, \end{aligned}$$

so wird

$$\int_{\delta_1}^{\delta} \sqrt{\sqrt{\frac{\delta}{x}} - 1} \cdot \frac{dx}{x} = +4\int_{\delta_1}^{\delta} \frac{v^2}{1+v^2}\, dv = 4\left[v - \operatorname{arc\,tg} v\right]_{\delta_1}^{\delta} =$$

$$4\left[\sqrt{\sqrt{\frac{\delta}{\delta_1}} - 1} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\sqrt{\frac{\delta}{\delta_1}} - 1}\right].$$

Diese Werthe der bestimmten Integrale endlich substituirt, erhalten wir für die Druckarbeit bei der Zähigkeit, so lange $\delta_1 \leqq \delta_z$ ist, folgende Formel:

$$a^{\text{mkg}} = \Delta^{\text{mm}^2} \cdot \delta^{\text{m}} \operatorname{tg}\beta \left[N f_0 \cdot 2{\cdot}3\, lg\, \frac{\delta}{\delta_1} + 4\sqrt{2p}\left(\sqrt{\sqrt{\frac{\delta}{\delta_1}} - 1} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\sqrt{\frac{\delta}{\delta_1}} - 1}\right)\right] \quad \ldots \quad 10.$$

Nachdem in vielen Fällen die Anwendung der Formeln einfacher ist, wenn darin anstatt $\frac{\delta}{\delta_1}$ die entsprechenden Werthe von λ stehen, so können wir die Formel 10. mit Hilfe der Formel 9. und 9a. folgendermassen umändern:

$$a^{\text{mkg}} = \Delta^{\text{mm}^2} \cdot \delta^{\text{m}} \operatorname{tg}\beta \cdot \left[N f_0 \cdot 2{\cdot}3 \lg (1+\lambda_1)^2 + 4\sqrt{2p}\,(\sqrt{\lambda_1} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\lambda_1})\right] \quad 11.$$

worin $\lambda_1 \leqq \lambda_z$ ist; folglich wird die Druckarbeit bis zur Grenze der Zähigkeit, da $\lambda_1 = \lambda_z$ ist, durch folgende Formel ausgedrückt sein:

$$a^{\text{mkg}} = \Delta^{\text{mm}^2} \cdot \delta^{\text{m}} \operatorname{tg}\beta \cdot \left[N f_0 \cdot 2{\cdot}3 \lg (1+\lambda_z)^2 + 4\sqrt{2p}\,(\sqrt{\lambda_z} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\lambda_z})\right] \quad 11a.$$

Die Formeln 10., 11., 11a. geben die Werthe der Flächen jener Schaubilder, die in Fig. 4 der Taf. VII—XIX mit Q bezeichnet sind.

Um die Richtigkeit und Anwendbarkeit dieser Formeln beurtheilen zu können, habe ich in nachfolgender Tabelle die Rechnungs- und planimetrischen Werthe neben einander gereiht.

Benennung des Versuchsmaterials	Δ^{mm^2}	δ^{m}	λ	a^{mkg}	
				Planimetr. Werthe	Rechnungs-Werthe
Blei	$114\cdot_{3}$	$0\cdot_{00119}$	$0\cdot_{25}$	$1\cdot_{47}$	$1\cdot_{49}$
Zinn	113	$0\cdot_{00121}$	$0\cdot_{15}$	$1\cdot_{3}$	$1\cdot_{225}$
Kupfer von 18 mm Stärke . .	$25\cdot_{07}$	$0\cdot_{00806}$	$0\cdot_{25}$	$2\cdot_{84}$	$2\cdot_{69}$
„ „ 18 „ „ . .	$24\cdot_{11}$	$0\cdot_{00509}$	$0\cdot_{20}$	$1\cdot_{33}$	$1\cdot_{27}$
Prima-Kesselblech	$25\cdot_{25}$	$0\cdot_{00812}$	$0\cdot_{15}$	$2\cdot_{465}$	$2\cdot_{54}$
Secunda-Kesselblech	$24\cdot_{98}$	$0\cdot_{00809}$	$0\cdot_{15}$	$2\cdot_{6}$	$2\cdot_{63}$
„ „	$24\cdot_{98}$	$0\cdot_{00508}$	$0\cdot_{15}$	$1\cdot_{7}$	$1\cdot_{65}$
Messing von 18 mm Stärke . .	$25\cdot_{34}$	$0\cdot_{00802}$	$0\cdot_{14}$	$1\cdot_{8}$	$1\cdot_{85}$
„ „ 18 „ „ . .	$25\cdot_{34}$	$0\cdot_{00802}$	$0\cdot_{24}$	$3\cdot_{4}$	$3\cdot_{34}$
„ „ 15 „ „ . .	$25\cdot_{5}$	$0\cdot_{00811}$	$0\cdot_{29}$	$4\cdot_{84}$	$4\cdot_{75}$
„ „ 12 „ „ . .	$25\cdot_{52}$	$0\cdot_{00813}$	$0\cdot_{23}$	$4\cdot_{66}$	$4\cdot_{96}$
Deltametall	$25\cdot_{51}$	$0\cdot_{0081}$	$0\cdot_{132}$	$2\cdot_{8}$	$2\cdot_{75}$

In Vorstehendem haben wir die Druckarbeit bei Zähigkeit des Materials bestimmt. Wir wollen nun zur Bestimmung derjenigen Druckarbeit übergehen, die bei Bildsamkeit des Materials entsteht. Den differentialen Werth dieser erhalten wir, wenn wir die Kraft nach Formel 8b. mit dem differentialen Werth des Weges $ds = -dx$ multipliciren.

Es ist also

$$da = -\Delta\delta \operatorname{tg}\beta\left[Nf_0 + \sqrt{2p\left(\sqrt{\frac{\delta}{\delta_z}} - 1\right)}\right]\frac{dx}{x},$$

woraus der gesammte Werth sich ergiebt, wenn wir diese Formel zwischen den bestimmten Grenzen von $x = \delta_z$ bis $x = \delta_1$ integriren. Es wird also:

$$a = -\Delta\delta \operatorname{tg}\beta\left[Nf_0 + \sqrt{2p\left(\sqrt{\frac{\delta}{\delta_z}} - 1\right)}\right]\int_{\delta_z}^{\delta_1}\frac{dx}{x} =$$

$$= +\Delta\delta \operatorname{tg}\beta\left[Nf_0 + \sqrt{2p\left(\sqrt{\frac{\delta}{\delta_z}} - 1\right)}\right]\int_{\delta_1}^{\delta_z}\frac{dx}{x}.$$

Den Werth des Integrals

$$\int_{\delta_1}^{\delta_z}\frac{dx}{x} = ln\frac{\delta_z}{\delta_1} = 2{\cdot}3\lg\frac{\delta_z}{\delta_1}$$

substituirt, erhalten wir die Formel jener Druckarbeit, welche bei Bildsamkeit des Materials entsteht:

$$a^{mkg} = \Delta^{mm^2}\delta^{m}\operatorname{tg}\beta\left[Nf_0 + \sqrt{2p}\sqrt{\sqrt{\frac{\delta}{\delta_z}} - 1}\right]2{\cdot}3\lg\frac{\delta_z}{\delta_1} \quad . \quad . \quad 12.$$

oder

$$a^{\text{mkg}} = \Delta^{\text{mm}^2}\,\delta^{\text{m}}\,\text{tg}\,\beta\,[Nf_0 + \sqrt{2p\,\lambda_x}]\,2{\cdot}3\,\text{lg}\left(\frac{1+\lambda_1}{1+\lambda_x}\right)^2 \quad \ldots \quad 12\text{a.}$$

Materialien der V. Gruppe besitzen Zähigkeit und Bildsamkeit. Die gesammte Druckarbeit besteht also bei diesen Materialien aus zwei Theilen und zwar aus jenen, welche die Formel 11a. und 12a. darstellen, weshalb man die Werthe dieser Formeln addiren muss.

Es ist also

$$a^{\text{mkg}} = \Delta^{\text{mm}^2}\,\delta^{\text{m}}\,\text{tg}\,\beta\left[Nf_0\,2{\cdot}3\,\text{lg}\,(1+\lambda_x)^2 + 4\sqrt{2p}\,(\sqrt{\lambda_x} - \text{arc tg}\sqrt{\lambda_x}) + (Nf_0 + \sqrt{2p\,\lambda_x})\,2{\cdot}3\,\text{lg}\left(\frac{1+\lambda_1}{1+\lambda_x}\right)^2\right] \quad \ldots \quad 13.$$

die Formel der gesammten Druckarbeit, wenn $\lambda_1 > \lambda_x$ ist, d. h. wenn die Deformation über die Grenze der Zähigkeit geschritten ist.

Um die Anwendbarkeit und Richtigkeit dieser Formel beurtheilen zu können, habe ich in nachfolgender Tabelle abermals die Rechnungs- und planimetrischen Werthe der Druckarbeit bei verschiedenen Materialien zusammengestellt.

Benennung des Versuchsmaterials	Δ^{mm^2}	δ^{m}	λ_1	a^{mkg}	
				Planimetr. Werthe	Rechnungs-Werthe
Kupfer von 18 mm Stärke . .	$25{\cdot}_{07}$	$0{\cdot}_{00806}$	$0{\cdot}_{35}$	$3{\cdot}_{76}$	$3{\cdot}_{7}$
Prima-Kesselblech	$25{\cdot}_{25}$	$0{\cdot}_{00812}$	$0{\cdot}_{30}$	$5{\cdot}_{47}$	$5{\cdot}_{37}$
Secunda-Kesselblech	$24{\cdot}_{98}$	$0{\cdot}_{00809}$	$0{\cdot}_{31}$	$5{\cdot}_{57}$	$5{\cdot}_{48}$
Messingblech von 18 mm Stärke	$25{\cdot}_{34}$	$0{\cdot}_{00802}$	$0{\cdot}_{30}$	$4{\cdot}_{38}$	$4{\cdot}_{18}$
„ „ 12 „ „	$25{\cdot}_{52}$	$0{\cdot}_{00813}$	$0{\cdot}_{31}$	$6{\cdot}_{1}$	$6{\cdot}_{5}$
Deltametall	$25{\cdot}_{51}$	$0{\cdot}_{00810}$	$0{\cdot}_{17}$	$3{\cdot}_{76}$	$3{\cdot}_{7}$

Betrachten wir ferner die bildsamen, d. h. jene Materialien, welche der II. Gruppe angehören.

Bei diesen Materialien ist $\lambda_x = 0$, also $\delta_x = \delta$. Um die Formel der gesammten Druckarbeit der bildsamen Materialien zu erhalten, müssen wir diese Werthe in Formel 12. substituiren, wodurch

$$a^{\text{mkg}} = \Delta^{\text{mm}^2}\,\delta^{\text{m}}\,\text{tg}\,\beta\,Nf_0\,2{\cdot}3\,\text{lg}\,\frac{\delta}{\delta_1} \text{ wird.} \quad \ldots \quad 14.$$

Für jene Fälle, wo $\delta < 0{\cdot}5\,D\,\text{tg}\,\beta$ ist und wo die Kraftformel also durch $Q_1 = \Delta\,(1+\lambda_1)^2\,Nf_1\,\text{tg}\,\beta \cdot Z_1$ ausgedrückt ist, sind die analytischen Formeln zwar auf dieselbe Weise ableitbar, doch wollen wir diese Ableitung in Nachfolgendem unterlassen, weil die graphische Methode in diesen Fällen verwendbarer ist. In den analytischen Formeln kommen nämlich, zufolge des Factors Z, sehr viele Glieder vor, was die Anwendung derselben erschwert.

38. Formeln der Scheerkraft und deren Arbeit bei Scheeren mit parallelen Schneiden.

Im Punkt 26 Seite 68 haben wir bei den graphischen Verfahren für die maximale Scheerkraft bei parallelen Schneiden ($\varphi = 0$) und rechtwinkeligem Schneidewinkel ($\alpha = 90$) folgende Formel erhalten:

$$Q_{\max} = \frac{\delta \cdot b}{1 + \lambda} Nf_{\max} \cdot \sin \beta$$

oder im Allgemeinen

$$Q_1 = \frac{\delta \cdot b}{1 + \lambda_1} Nf_1 \sin \beta.$$

Wenn wir hier anstatt Nf dessen analytischen Werth (Formel 1.) substituiren, erhalten wir für die Scheerkraft folgende analytische Formel:

$$Q_1 = \frac{\delta \cdot b}{1 + \lambda_1} (Nf_0 + \sqrt{2 p \lambda_1}) \sin \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15.$$

und für die maximale Scheerkraft:

$$Q_{\max} = \frac{\delta \cdot b}{1 + \lambda_x} (Nf_0 + \sqrt{2 p \lambda_x}) \sin \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16.$$

Bezüglich der Arbeit sei bemerkt, dass diese bei Materialien V. Gruppe aus zwei Theilen besteht, nämlich aus dem der Zähigkeit und aus jenem der Bildsamkeit entsprechenden.

Den differentialen Werth jenes Theiles, welcher der Zähigkeit entspricht, erhalten wir, wenn wir die Kraftformel 15. mit dem differentialen Werthe des Weges multipliciren. Die Formel des Weges (nach Seite 70) ist:

$$s_1 = \delta \operatorname{ctg} \beta \cdot 0{\cdot}611 \sqrt{\lambda_1} = \delta \operatorname{ctg} \beta \cdot 0{\cdot}611 \sqrt{x}$$

somit

$$ds_1 = \delta \operatorname{ctg} \beta \cdot 0{\cdot}611 \frac{1}{2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

folglich:

$$da_z = \frac{\delta \cdot b}{1 + x} (Nf_0 + \sqrt{2 p x}) \sin \beta \cdot \delta \operatorname{ctg} \beta \frac{0{\cdot}611}{2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$da_z = \delta^2 b \cos \beta \cdot 0{\cdot}3055 \left[Nf_0 \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{x}} + \sqrt{2 p} \frac{\sqrt{x}\, dx}{(1 + x)\sqrt{x}} \right]$$

$$da_z = \delta^2 b \cos \beta \cdot 0{\cdot}3055 \left[Nf_0 \frac{dx}{x^{1/2} + x^{3/2}} + \sqrt{2 p} \frac{dx}{1 + x} \right].$$

Hieraus erhalten wir die gesammte Arbeit, wenn wir diesen Ausdruck zwischen den bestimmten Grenzen von $x = 0$ bis $x = \lambda_z$ integriren.

Es ist also

$$a_x = \delta^2 b \cos \beta \cdot 0{\cdot}3055 \left[Nf_0 \int_0^{\lambda_x} \frac{dx}{x^{1/2} + x^{3/2}} + \sqrt{2 p} \int_0^{\lambda_x} \frac{dx}{1 + x} \right].$$

Die Werthe der hier vorkommenden Integrale sind, wenn

$$x^{1/2} = y$$
$$x = y^2$$
$$dx = 2y\,dy$$

genommen wird

$$\int_0^{\lambda_z} \frac{dx}{x^{1/2} + x^{3/2}} = \int_0^{\lambda_z} \frac{2y\,dy}{y + y^3} = 2\int_0^{\lambda_z} \frac{dy}{1 + y^2} = 2\Big[\operatorname{arc\,tg} y\Big]_0^{\lambda_z} = 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\lambda_z}$$

und

$$\int_0^{\lambda_z} \frac{dx}{1 + x} = \ln\Big(1 + x\Big)_0^{\lambda_z} = \ln(1 + \lambda_z) = 2{\cdot}3 \lg(1 + \lambda_z).$$

Durch Substitution dieser ergiebt sich als der Zähigkeit entsprechende Formel der Scheerarbeit:

$$a_z^{\text{mkg}} = \delta^{\text{mm}^2}\, b \cos\beta \cdot 0{\cdot}3055\,[N f_0 \cdot 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\lambda_z} + \sqrt{2\,p} \cdot 2{\cdot}3 \lg(1 + \lambda_z)] \quad . \quad 17.$$

Um weiterhin den der Bildsamkeit entsprechenden Theil der Scheerarbeit zu erlangen, müssen wir vorerst die Kraftformel bestimmen.

Den Werth der maximalen Scheerkraft finden wir in Formel 16. ausgedrückt. Dieser Werth vermindert sich jedoch, weil der auf Zug beanspruchte Querschnitt (siehe Fig. 6, Taf. XX) sich der bildsamen Dehnung entsprechend vermindert, folglich ist die gesuchte Kraftformel:

$$Q_x = \frac{\delta b}{(1 + \lambda_z)(1 + x)} (N f_0 + \sqrt{2\,p\,\lambda_z}) \sin\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16\,\text{a}.$$

Als Formel des gesammten Weges erhielten wir auf Seite 70:

$$s = \delta \operatorname{ctg}\beta \cdot 0{\cdot}611 \sqrt{\lambda_z + \varkappa(1 + \lambda_z)},$$

und für jenen, welcher der Zähigkeit entspricht

$$s_z = \delta \operatorname{ctg}\beta \cdot 0{\cdot}611 \sqrt{\lambda_z}.$$

Durch Subtraction dieser ergiebt sich jener Weg, welcher der Bildsamkeit entspricht:

$$s_b = s - s_z = \delta \operatorname{ctg}\beta \cdot 0{\cdot}611\,[\sqrt{\lambda_z + \varkappa(1 + \lambda_z)} - \sqrt{\lambda_z}].$$

Um dessen differentialen Werth zu erhalten, nehmen wir an, dass

$$\sqrt{\lambda_z + \varkappa(1 + \lambda_z)} = \sqrt{\lambda_z + x(1 + \lambda_z)} = \sqrt{a + x \cdot c} = \sqrt{y}$$

sei, also dass: $a + cx = y$

folglich $c\,dx = dy.$

Es ist also

$$d\left(\sqrt{\lambda_z + x(1 + \lambda_z)}\right) = d\left(\sqrt{y}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c\,dx}{\sqrt{a + cx}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + \lambda_z)\,dx}{\sqrt{\lambda_z + x(1 + \lambda_z)}}$$

und

$$ds_b = \delta \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot 0{\cdot}611\, \frac{(1 + \lambda_z)}{2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\lambda_z + x(1 + \lambda_z)}}.$$

Wenn wir Formel 16a. mit ds_b multipliciren, erhalten wir den differentialen Werth der Arbeit:

$$da_b = \frac{\delta b}{(1+\lambda_z)(1+x)}(Nf_0 + \sqrt{2p\lambda_z})\sin\beta\cdot\delta\operatorname{ctg}\beta\cdot 0{\cdot}611\,\frac{(1+\lambda_z)}{2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\lambda_x + x(1+\lambda_z)}}$$

$$da_b = \delta^2 b\cos\beta\cdot 0{\cdot}3055\,(Nf_0 + \sqrt{2p\lambda_z})\cdot\frac{dx}{(1+x)\sqrt{\lambda_z + x(1+\lambda_z)}}.$$

Um den gesammten Werth dieser Arbeit zu erhalten, müssen wir diesen Ausdruck zwischen den bestimmten Grenzen von $x = 0$ bis $x = z$ integriren.

Es ist also

$$a_b = \delta^2 b\cos\beta\cdot 0{\cdot}3055\,(Nf_0 + \sqrt{2\,p\,\lambda_z})\int_0^z \frac{dx}{(1+x)\sqrt{\lambda_z + x(1+\lambda_z)}}.$$

Nachdem aber

$$\int_0^z \frac{dx}{(1+x)\sqrt{\lambda_z + x(1+\lambda_z)}} = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{\lambda_z + x(1+\lambda_z)} + x\sqrt{\lambda_z + x(1+\lambda_z)}},$$

und wenn wir noch

$$\sqrt{\lambda_z + x(1+\lambda_z)} \qquad \sqrt{a + x\cdot c} \qquad y$$

$$a + cx = y^2,$$

beziehungsweise

$$cdx = 2\,y\,dy$$

$$x = \frac{y^2 - a}{c}$$

setzen, so ist

$$\int_0^z \frac{dx}{(1+x)\sqrt{\lambda_z + x(1+\lambda_z)}} = \int_0^z \frac{2\,y\,dy}{c\left(y + \frac{y^2 - a}{c}y\right)} = 2\int_0^z \frac{dy}{(c-a) + y^2}$$

$$= 2\left[\frac{1}{\sqrt{c-a}}\cdot\operatorname{arc\,tg}\,y\sqrt{\frac{1}{c-a}}\right]_0^z = 2\,[\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\lambda_z + z(1+\lambda_z)} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\lambda_z}],$$

folglich ist die Formel der Scheerarbeit für die Bildsamkeit des Materials:

$$a_b^{\text{mkg}} = \delta^{\text{mm}^2}\, b^{\text{m}}\cos\beta\cdot 0{\cdot}3055\,(Nf_0 + \sqrt{2p\lambda_z})\cdot$$
$$\cdot 2\,[\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\lambda_z + z(1+\lambda_z)} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\lambda_z}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 18.$$

Die gesammte Scheerarbeit bei Materialien V. Gruppe erhalten wir nun, wenn wir jene zwei Theile der Scheerarbeit, welche Formeln 17. und 18. darstellen, addiren, wodurch wir folgende Formel erhalten:

$$a^{\text{mkg}} = \delta^{\text{mm}^2}\, b^{\text{m}}\cos\beta\,0{\cdot}3055\,[Nf_0\cdot 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\lambda_z} + \sqrt{2p}\cdot 2{\cdot}3\lg(1+\lambda_z) +$$
$$+ 2\,(Nf_0 + \sqrt{2\,p\,\lambda_z})\cdot(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\lambda_z + z(1+\lambda_z)} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\lambda_z})] \quad . \quad . \quad 19.$$

Die Materialien der V. Gruppe können durch Beanspruchungen spröde gemacht werden. In diesem Zustande besitzen dieselben keine Zähigkeit

mehr ($\lambda_z = 0$), sondern nur Bildsamkeit. Die gesammte Scheerarbeit hierfür ergiebt sich aus Formel 18., wenn $\lambda_z = 0$ gesetzt wird, es wird also:

$$a_b^{\text{mkg}} = \delta^{\text{mm}^2} b^{\text{m}} \cos\beta \cdot 0{\cdot}3055\, Nf_{\max} \cdot 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\varkappa} \quad \ldots \quad 20.$$

Bei Ableitung der Formel der Scheerkraft haben wir vorausgesetzt, dass der Schneidewinkel $\alpha = 90^0$ sei.

Im Weiteren betrachten wir noch jenen Fall, wo die parallelen Schneiden einen spitzen Schneidewinkel haben, wenn also $\alpha < 90^0$ ist.

Bei dem graphischen Verfahren haben wir auf S. 73 gesehen, dass in diesem Falle die Kraftformel sich von jener, welche den rechtwinkeligen Schneiden entspricht, nur dadurch unterscheidet, dass darin auch der Factor: $\frac{A}{\sin^2\alpha}$ vorkommt; bezüglich des Weges hingegen fanden wir, dass dieser in beiden Fällen gleich ist, weshalb die gesammte Scheerarbeit bei Scheeren mit spitzem Schneidewinkel bei zähen und bildsamen Materialien durch folgende Formel gegeben ist:

$$a^{\text{mkg}} = \frac{A}{\sin^2\alpha} \cdot \delta^{\text{mm}^2} b^{\text{m}} \cos\beta \cdot 0{\cdot}3055 \left[Nf_0 \cdot 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\lambda_z} + \sqrt{2p} \cdot 2{\cdot}3 \lg (1+\lambda_x) + \right.$$
$$\left. + 2 \left(Nf_0 + \sqrt{2p}\,\lambda_z\right) \left(\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\lambda_x + \varkappa (1+\lambda_z)} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\lambda_x}\right) \right] . \quad \ldots \quad 21.$$

ferner bei spröde gemachten, aber bildsamen Materialien durch:

$$a^{\text{mkg}} = \frac{A}{\sin^2\alpha} \cdot \delta^{\text{mm}^2} b^{\text{m}} \cos\beta \cdot 0{\cdot}3055\, Nf_{\max} \cdot 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\varkappa} \quad \ldots \quad 22.$$

dargestellt ist, worin $A = 1 - 2 \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\alpha$ ist.

Um wieder die Anwendbarkeit und Richtigkeit dieser Formeln beurtheilen zu können, habe ich in nachfolgender Tabelle sowohl den Rechnungs- als auch den planimetrischen Werth der Scheerarbeit verschiedener Materialien zusammengestellt.

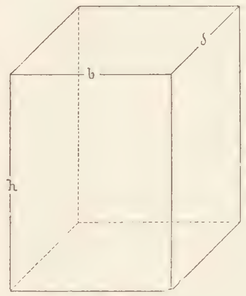
Benennung des Versuchsmaterials	δ^{mm}	b^{m}	$\varkappa$	a^{mkg}	
				Planimetr. Werthe	Rechnungs-Werthe
Prima-Kesselblech	$18{\cdot}_1$	$0{\cdot}_{0352}$	$0{\cdot}_{84}$	$66{\cdot}_5$	65
„ „	15	$0{\cdot}_{0484}$	$0{\cdot}_{84}$	61	$62{\cdot}_5$
„ „	$12{\cdot}_1$	$0{\cdot}_{0487}$	$0{\cdot}_{84}$	52	41
Durch Beanspruchung spröde gemachtes Prima-Kesselblech .	$14{\cdot}_7$	$0{\cdot}_{0334}$	$0{\cdot}_{84}$	$46{\cdot}_5$	46
Secunda-Kesselblech	$18{\cdot}_1$	$0{\cdot}_{0483}$	$0{\cdot}_4$	95	112
„ „	$12{\cdot}_1$	$0{\cdot}_{0483}$	$0{\cdot}_4$	42	50
Durch Beanspruchung spröde gemachtes Secunda-Kesselblech .	$15{\cdot}_7$	$0{\cdot}_{0323}$	$0{\cdot}_4$	56	53
Secunda-Kesselblech	$10{\cdot}_5$	$0{\cdot}_{0338}$	$0{\cdot}_4$	26	$24{\cdot}_6$
Kupfer	$17{\cdot}_9$	$0{\cdot}_{0543}$	$0{\cdot}_{08}$	52	53
„	12	$0{\cdot}_{0543}$	$0{\cdot}_{08}$	$22{\cdot}_2$	$25{\cdot}_6$
Deltametall	$12{\cdot}_1$	$0{\cdot}_{0542}$	0	$31{\cdot}_3$	$29{\cdot}_3$
Zinn	18	$0{\cdot}_{0862}$	$4{\cdot}_{56}$	$8{\cdot}_{75}$	$7{\cdot}_{75}$

Bezüglich der Werthe von $\varkappa$ sei bemerkt, dass diese für Secunda-Kesselblech und Kupfer beim Scheeren nicht bestimmt wurden, weshalb ich diese hier mittelst der Formeln 21. und 22. berechnet habe.

Nachdem die Rechnungswerthe mit den planimetrischen Werthen sehr gut übereinstimmen, so dürften wir hieraus auf die Richtigkeit und Verwendbarkeit des Principes der inneren Reibung und der Kraftvermittlung als auch auf die Richtigkeit der analytischen Formeln schliessen.

Durch das analytische Verfahren sind wir nicht nur in der Lage, das Gesetz der Veränderlichkeit der Zug- und Druckkräfte zu erkennen, die Grösse der Fläche des Schaubildes, d. h. den Werth der Arbeit im Voraus zu bestimmen, sondern auch die Beanspruchungen höherer Grade, als Biegen, Winden, Spanabnehmen u. s. w. zu erörtern, da wir hierbei die bis jetzt gewonnenen analytischen Formeln als Grundformel benutzen können.

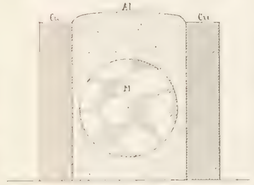
Halle a. S., Buchdruckerei des Waisenhauses.



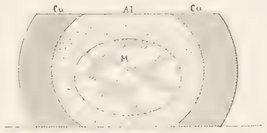
1.

2

6



3.

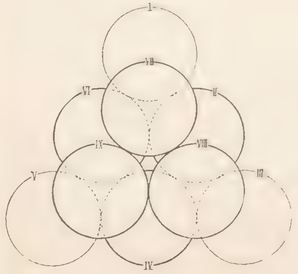


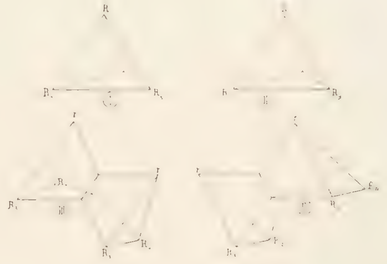
4.

12

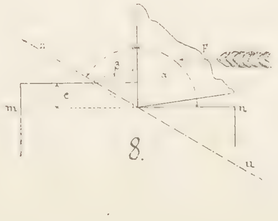
7.

11.

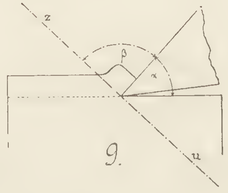




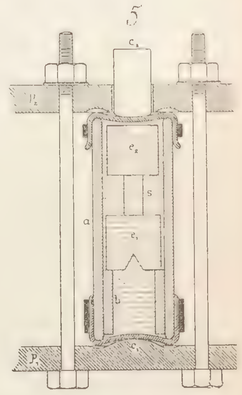
10.



8.



9.



5

Fig. 1. Spiegeleisen. Mn 3 %.

Fig. 2. Schalenguss (Hartguss).
$C = 3{\cdot}_{15}$ $Si = 0{\cdot}_{67}$
$P = 0{\cdot}_{36}$ $Mn = 0{\cdot}_{96}$

Fig. 3. Graues Roheisen.
$C = 3{\cdot}_{6}$ $Si = 2{\cdot}_{7}$ $Mn = 0{\cdot}_{8}$
$P = 1{\cdot}_{32}$ $S = 0{\cdot}_{033}$ $Cu = 0{\cdot}_{01}$

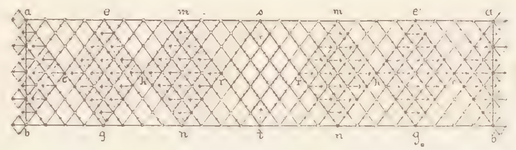
Fig. 4. Graues Roheisen.
$C = 4$ $Si = 1{\cdot}_{54}$ $Mn = 3{\cdot}_{98}$
$P = 0{\cdot}_{05}$ $S = 0{\cdot}_{025}$ $Cu = 0{\cdot}_{04}$

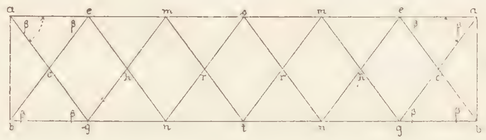
Fig. 5. Ingot aus Martin-Stahl.
$C = 1{\cdot}_{15}$

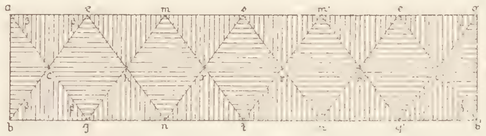
Fig. 6. Raffinirter Martin-Stahl.
$C = 1{\cdot}_{15}$

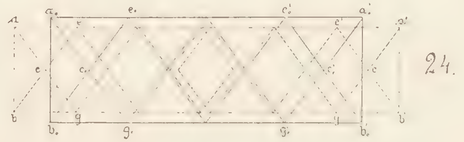
Fig. 7. Flusseisen, wenig gehämmert.
$C = 0{\cdot}_{22}$ $Si = 0{\cdot}_{181}$ $Mn = 0{\cdot}_{44}$
$P = 0{\cdot}_{051}$ $S = 0{\cdot}_{025}$ $Cu = 0{\cdot}_{102}$

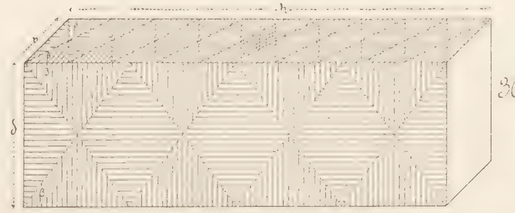
Fig. 8. Gut gehämmertes Schmiedeeisen.


21.


22.

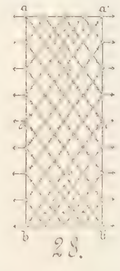

23.


24.

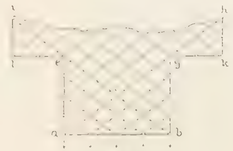

30.

26.

27.


28.

29.


25.

31.

32.

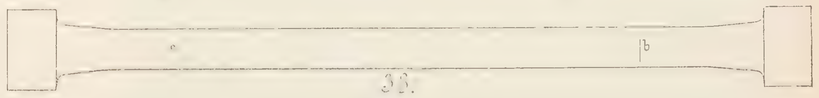
33.

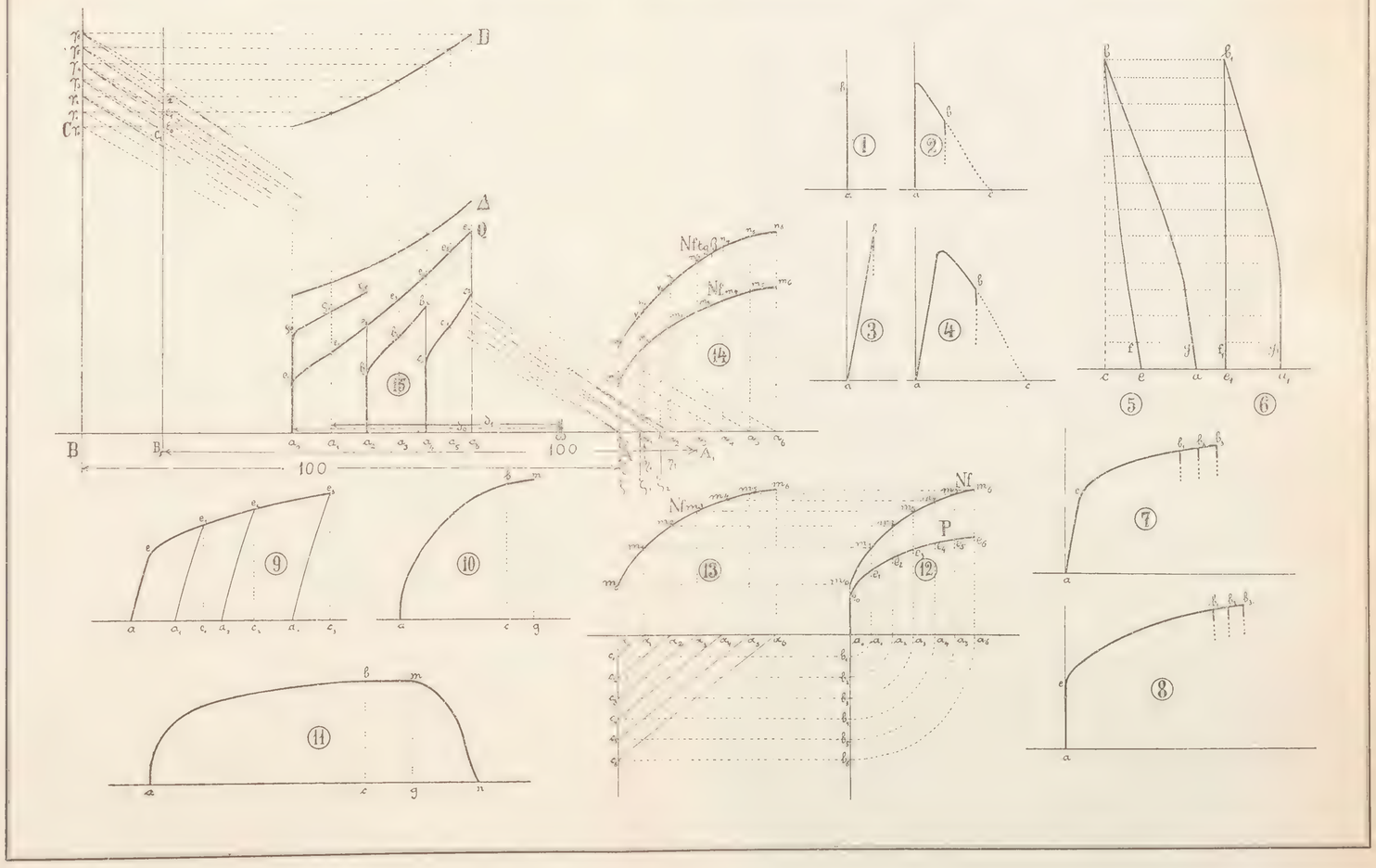
34.

35.

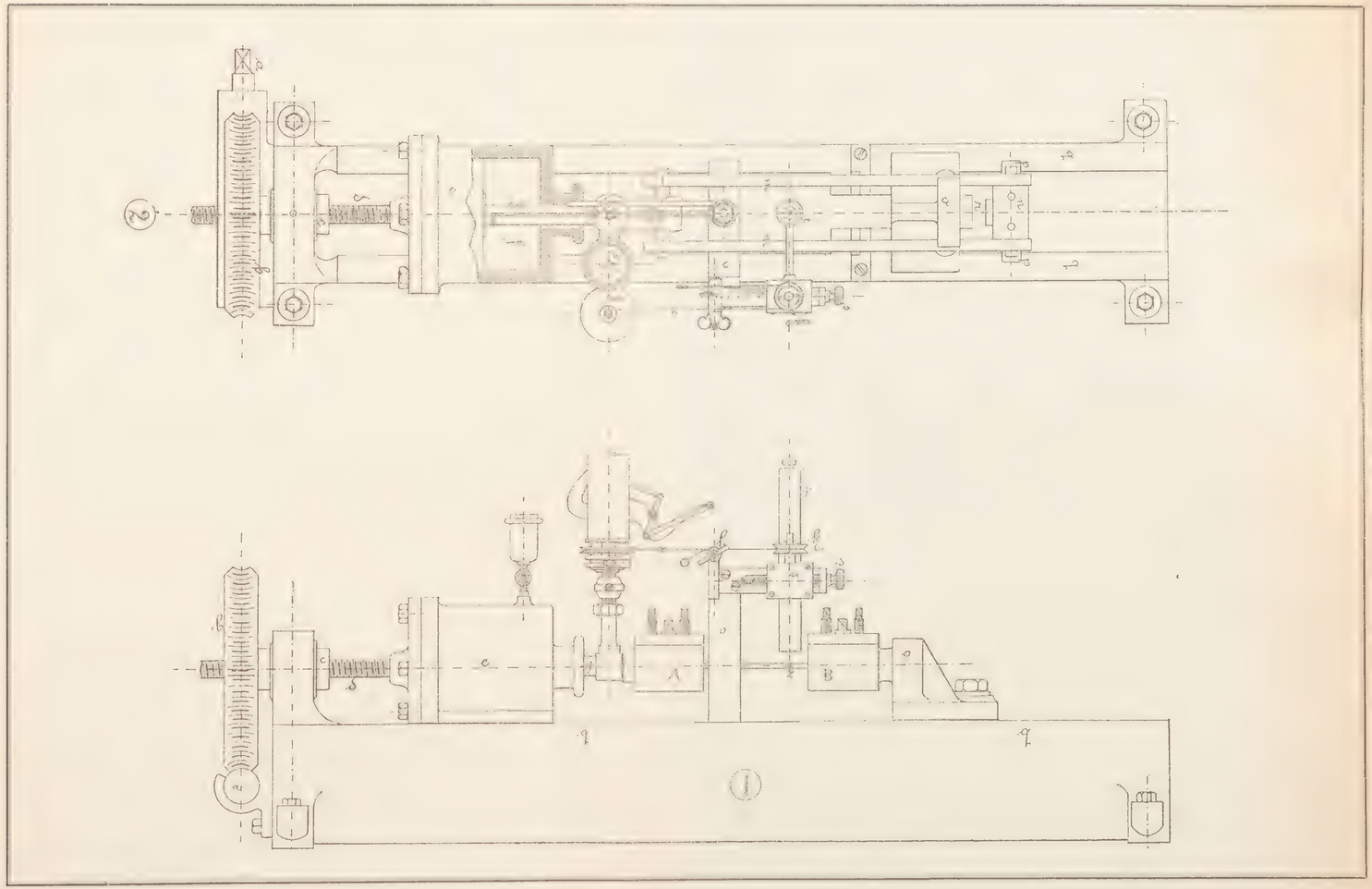
36.

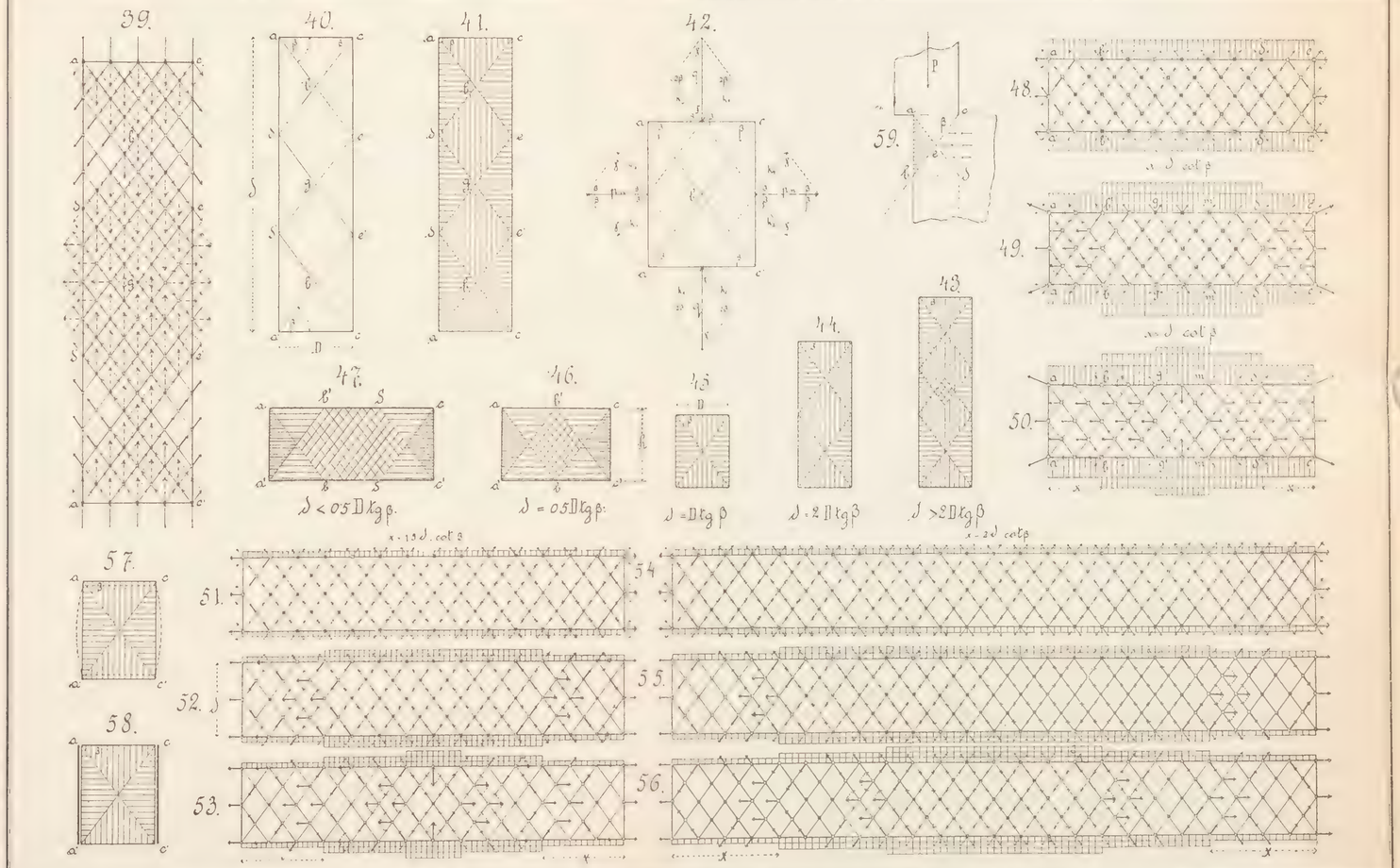
37.


38.


D
Δ
Q
B
100
100
P
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15

Apparat für Zug- und Druckbeanspruchung. Tafel V.

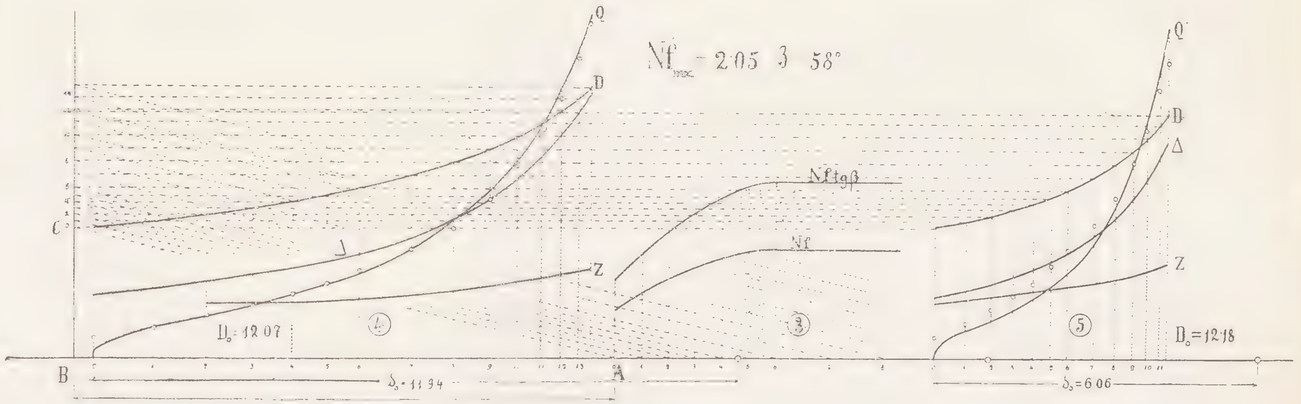


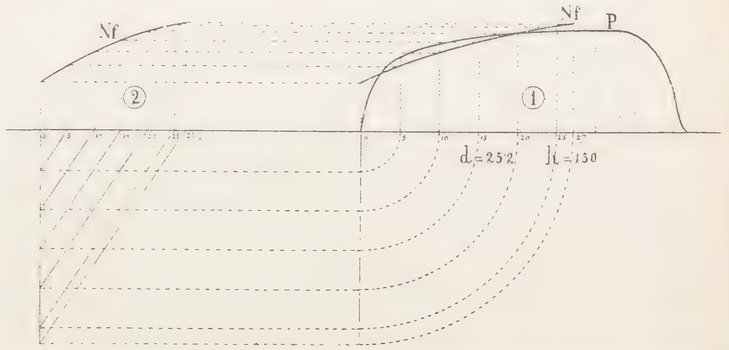

39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.
53.
54.
55.
56.
57.
58.
59.
δ < 0·5 D tg β.
δ = 0·5 D tg β.
δ = D tg β
δ = 2 D tg β
δ > 2 D tg β

Blei. Q kg $= 43{,}_{52}$. Q mm.. $\operatorname{tg}\beta = 1{,}_{73}$. $\gamma = 0{,}_{58}$. $\lambda = 0{,}_{2}$..

Tabelle zu Tafel VII.

	Marken der Theilpunkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
	λ_D	0	$0{,}_{20}$	$0{,}_{30}$	$0{,}_{35}$	$0{,}_{40}$	$0{,}_{50}$	$0{,}_{50}$	$0{,}_{50}$	$0{,}_{50}$	$0{,}_{60}$	$0{,}_{70}$	$0{,}_{80}$	$0{,}_{90}$	$1{,}_{00}$	$1{,}_{05}$
	D_x mm	$12{,}_{5}$	$12{,}_{6}$	$13{,}_{2}$	$13{,}_{8}$	$14{,}_{8}$	$15{,}_{6}$	$15{,}_{9}$	$16{,}_{7}$	$18{,}_{1}$	$19{,}_{1}$	$20{,}_{3}$	$21{,}_{7}$	$22{,}_{3}$	$24{,}_{1}$	$25{,}_{0}$
	Δ_x mm²	$114{,}_{3}$	$126{,}_{7}$	$138{,}_{4}$	$151{,}_{9}$	$165{,}_{3}$	$178{,}_{5}$	$198{,}_{4}$	$224{,}_{1}$	$257{,}_{0}$	$293{,}_{0}$	$330{,}_{0}$	$370{,}_{1}$	$412{,}_{}$	$457{,}_{0}$	$493{,}_{1}$
	Nf (1 kg = 10 mm)	$0{,}_{014}$	$1{,}_{000}$	$1{,}_{188}$	$1{,}_{44}$	$1{,}_{70}$	$1{,}_{96}$	$2{,}_{36}$	$2{,}_{90}$	$2{,}_{96}$	$2{,}_{96}$	$2{,}_{96}$	$2{,}_{96}$	$2{,}_{96}$	$2{,}_{96}$	$2{,}_{96}$
	$Nf \operatorname{tg}\beta$	$1{,}_{197}$	$1{,}_{00}$	$2{,}_{06}$	$2{,}_{60}$	$2{,}_{93}$	$3{,}_{39}$	$3{,}_{96}$	$3{,}_{96}$	$3{,}_{96}$	$3{,}_{96}$	$3{,}_{96}$	$3{,}_{96}$	$3{,}_{96}$	$3{,}_{96}$	$3{,}_{96}$
δ_x 11·4	δ_x mm	$11{,}_{34}$	$10{,}_{6}$	$9{,}_{6}$	$9{,}_{1}$	$8{,}_{6}$	$7{,}_{6}$	$7{,}_{06}$	$6{,}_{1}$	$5{,}_{81}$	$4{,}_{66}$	$4{,}_{14}$	$3{,}_{66}$	$3{,}_{1}$	$2{,}_{66}$	$2{,}_{25}$
	n	—	—	$2{,}_{12}$	$2{,}_{32}$	$2{,}_{5}$	$3{,}_{}$	$3{,}_{56}$	$4{,}_{3}$	$5{,}_{02}$	$6{,}_{06}$	$8{,}_{15}$	$9{,}_{6}$	$11{,}_{06}$	13	$14{,}_{3}$
	Z	—	—	$1{,}_{06}$	$1{,}_{11}$	$1{,}_{06}$	$1{,}_{0}$	$1{,}_{09}$	$1{,}_{12}$	$1{,}_{22}$	$1{,}_{31}$	$1{,}_{39}$	$1{,}_{44}$	$1{,}_{52}$	$1{,}_{6}$	$1{,}_{66}$
	Q mm (Versuchswerthe)	$1{,}_{}$	$5{,}_{28}$	$8{,}_{1}$	$9{,}_{6}$	12	$15{,}_{}$	$15{,}_{2}$	20	$27{,}_{1}$	$31{,}_{2}$	$37{,}_{3}$	$42{,}_{6}$	50	$57{,}_{}$	64
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$0{,}_{}$	$5{,}_{0}$	$7{,}_{}$	$9{,}_{}$	$11{,}_{}$	$13{,}_{}$	$16{,}_{1}$	$19{,}_{}$	$23{,}_{4}$	$29{,}_{1}$	$35{,}_{}$	$40{,}_{6}$	48	$55{,}_{}$	62
δ_x 6·mm														$\lambda = 0{,}_{2}$		
	δ_x mm	$6{,}_{66}$	$5{,}_{66}$	$5{,}_{06}$	$4{,}_{6}$	$4{,}_{2}$	$3{,}_{66}$	$3{,}_{36}$	$3{,}_{06}$	$2{,}_{66}$	$2{,}_{33}$	$2{,}_{1}$	$1{,}_{9}$	$1{,}_{73}$		
	n	$31{,}_{2}$	$3{,}_{6}$	$4{,}_{2}$	$4{,}_{9}$	$5{,}_{3}$	$6{,}_{11}$	$7{,}_{3}$	$8{,}_{4}$	$10{,}_{6}$	$13{,}_{1}$	$15{,}_{1}$	$18{,}_{1}$	$20{,}_{6}$		
	Z	$1{,}_{03}$	$1{,}_{12}$	$1{,}_{08}$	$1{,}_{2}$	$1{,}_{13}$	$1{,}_{20}$	$1{,}_{237}$	$1{,}_{28}$	$1{,}_{418}$	$1{,}_{506}$	$1{,}_{564}$	$1{,}_{718}$	$1{,}_{77}$		
	Q mm (Versuchswerthe)	$1{,}_{2}$	$5{,}_{0}$	$6{,}_{91}$	$9{,}_{26}$	$11{,}_{2}$	$13{,}_{1}$	$15{,}_{6}$	$21{,}_{1}$	$29{,}_{3}$	$36{,}_{3}$	$44{,}_{3}$	54	$61{,}_{7}$		
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$3{,}_{}$	$6{,}_{4}$	$9{,}_{1}$	$11{,}_{}$	$13{,}_{}$	$17{,}_{1}$	$19{,}_{3}$	$24{,}_{1}$	$29{,}_{1}$	$36{,}_{2}$	$42{,}_{5}$	50	55		





Masseinheiten

bei Zug:

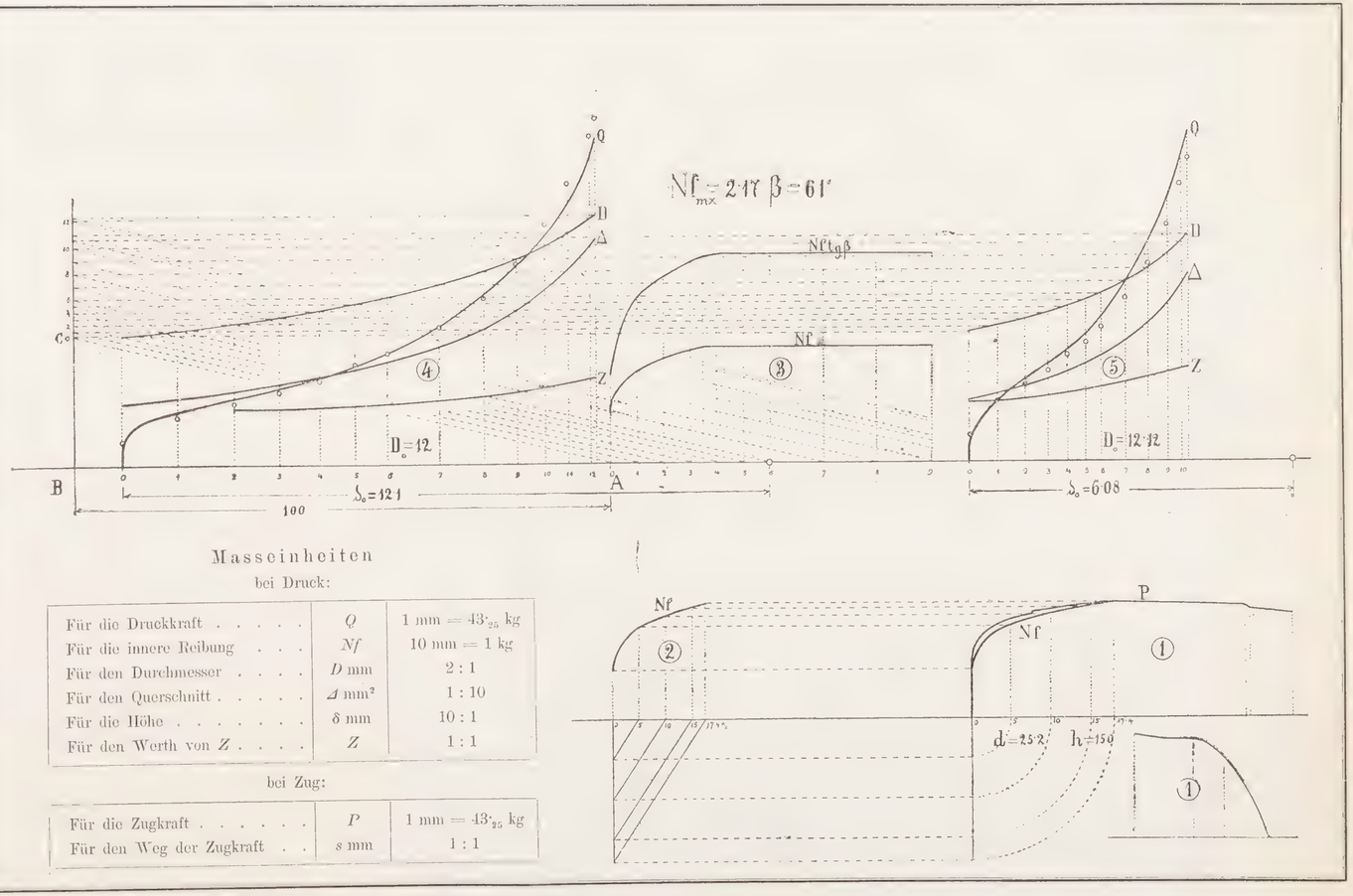
Für die Zugkraft	P kg	1 mm = $43{,}_{52}$ kg
Für den Weg der Zugkraft . .	s mm	1 : 1

bei Druck:

Für die Druckkraft	Q kg	1 mm = $43{,}_{52}$ kg
Für die innere Reibung . . .	Nf kg	10 mm = 1 kg
Für den Werth von Z	Z	1 : 1
Für den Durchmesser	D mm	2 : 1
Für den Querschnitt	Δ mm²	1 : 10
Für die Höhe	δ mm	10 : 1

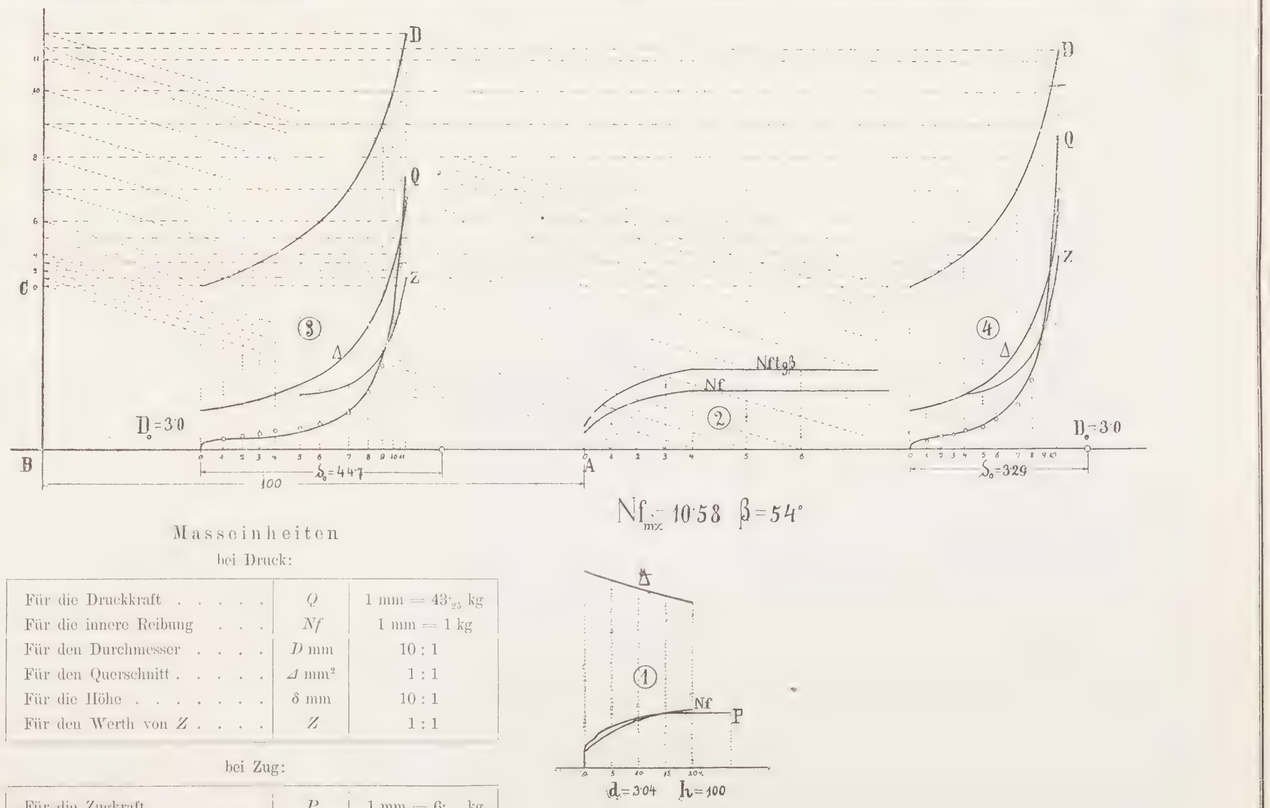
Zinn. $Q\,\text{kg} = 43{\cdot}_{25} \cdot Q\,\text{mm}$, $\quad \text{tg}\,\beta = 1{\cdot}_{8}$, $\gamma = 0{\cdot}_{55}$, $\lambda = 0{\cdot}_{174}$. Tabelle zu Tafel VIII.

	Marken der Theilpunkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
	λ_D	0	$0{\cdot}_{05}$	$0{\cdot}_{10}$	$0{\cdot}_{15}$	$0{\cdot}_{20}$	$0{\cdot}_{25}$	$0{\cdot}_{30}$	$0{\cdot}_{40}$	$0{\cdot}_{50}$	$0{\cdot}_{60}$	$0{\cdot}_{70}$	$0{\cdot}_{80}$	$0{\cdot}_{90}$	$0{\cdot}_{93}$
	D_x mm	12	$12{\cdot}_{6}$	$13{\cdot}_{2}$	$13{\cdot}_{8}$	$14{\cdot}_{4}$	$15{\cdot}_{0}$	$15{\cdot}_{6}$	$16{\cdot}_{8}$	$18{\cdot}_{0}$	$19{\cdot}_{2}$	$20{\cdot}_{4}$	$21{\cdot}_{6}$	$22{\cdot}_{8}$	$23{\cdot}_{4}$
	Δ_x mm²	113	$124{\cdot}_{7}$	$136{\cdot}_{8}$	$149{\cdot}_{5}$	$162{\cdot}_{8}$	$176{\cdot}_{7}$	$191{\cdot}_{1}$	$221{\cdot}_{6}$	$254{\cdot}_{5}$	$289{\cdot}_{5}$	$326{\cdot}_{8}$	$366{\cdot}_{4}$	$408{\cdot}_{2}$	$428{\cdot}_{7}$
	Nf (1 kg = 10 mm)	$0{\cdot}_{312}$	$1{\cdot}_{72}$	$1{\cdot}_{93}$	$2{\cdot}_{07}$	$2{\cdot}_{17}$	$2{\cdot}_{17}$	$2{\cdot}_{17}$	$2{\cdot}_{17}$	$2{\cdot}_{17}$	$2{\cdot}_{17}$	$2{\cdot}_{17}$	$2{\cdot}_{17}$	$2{\cdot}_{17}$	$2{\cdot}_{17}$
	$Nf\,\text{tg}\,\beta$	$1{\cdot}_{64}$	$3{\cdot}_{4}$	$3{\cdot}_{47}$	$3{\cdot}_{47}$	$3{\cdot}_{9}$	$3{\cdot}_{9}$	$3{\cdot}_{9}$	$3{\cdot}_{9}$	$3{\cdot}_{9}$	$3{\cdot}_{9}$	$3{\cdot}_{9}$	$3{\cdot}_{9}$	$3{\cdot}_{9}$	$3{\cdot}_{9}$
$\delta_0 = 12{\cdot}_{1}$	δ_x mm	$12{\cdot}_{1}$	$11{\cdot}_{03}$	10	$9{\cdot}_{15}$	$8{\cdot}_{4}$	$7{\cdot}_{75}$	$7{\cdot}_{15}$	$6{\cdot}_{18}$	$5{\cdot}_{37}$	$4{\cdot}_{73}$	$4{\cdot}_{2}$	$3{\cdot}_{75}$	$3{\cdot}_{26}$	$3{\cdot}_{25}$
	n	—	—	$2{\cdot}_{38}$	$2{\cdot}_{71}$	$3{\cdot}_{03}$	$3{\cdot}_{48}$	$3{\cdot}_{93}$	$4{\cdot}_{9}$	$6{\cdot}_{04}$	$7{\cdot}_{3}$	$8{\cdot}_{74}$	$10{\cdot}_{35}$	$12{\cdot}_{24}$	$12{\cdot}_{85}$
	Z	—	—	$1{\cdot}_{015}$	$1{\cdot}_{037}$	$1{\cdot}_{068}$	$1{\cdot}_{1}$	$1{\cdot}_{133}$	$1{\cdot}_{21}$	$1{\cdot}_{274}$	$1{\cdot}_{35}$	$1{\cdot}_{434}$	$1{\cdot}_{5}$	$1{\cdot}_{57}$	$1{\cdot}_{6}$
	Q mm (Versuchswerthe)	$2{\cdot}_{2}$	$9{\cdot}_{5}$	$12{\cdot}_{4}$	$14{\cdot}_{2}$	16	$18{\cdot}_{3}$	$20{\cdot}_{6}$	$25{\cdot}_{5}$	$31{\cdot}_{6}$	37	$42{\cdot}_{5}$	$48{\cdot}_{6}$	$57{\cdot}_{1}$	$60{\cdot}_{5}$
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$4{\cdot}_{28}$	$8{\cdot}_{9}$	$11{\cdot}_{1}$	$13{\cdot}_{4}$	$15{\cdot}_{6}$	$18{\cdot}_{5}$	$20{\cdot}_{6}$	$25{\cdot}_{5}$	$30{\cdot}_{85}$	$37{\cdot}_{2}$	$44{\cdot}_{6}$	$52{\cdot}_{2}$	61	$64{\cdot}_{5}$
													$\lambda = 0{\cdot}_{74}$		
$\delta_0 = 6{\cdot}_{08}$	δ_x mm	$6{\cdot}_{08}$	$5{\cdot}_{54}$	$5{\cdot}_{02}$	$4{\cdot}_{6}$	$4{\cdot}_{22}$	$3{\cdot}_{89}$	$3{\cdot}_{6}$	$3{\cdot}_{13}$	$2{\cdot}_{7}$	$2{\cdot}_{37}$	$2{\cdot}_{1}$	$1{\cdot}_{975}$		
	n	$3{\cdot}_{57}$	$4{\cdot}_{05}$	$4{\cdot}_{75}$	$5{\cdot}_{45}$	$6{\cdot}_{15}$	$6{\cdot}_{95}$	$7{\cdot}_{8}$	$9{\cdot}_{68}$	$12{\cdot}_{0}$	$14{\cdot}_{6}$	$17{\cdot}_{4}$	$19{\cdot}_{2}$		
	Z	$1{\cdot}_{106}$	$1{\cdot}_{138}$	$1{\cdot}_{193}$	$1{\cdot}_{222}$	$1{\cdot}_{28}$	$1{\cdot}_{33}$	$1{\cdot}_{39}$	$1{\cdot}_{47}$	$1{\cdot}_{565}$	$1{\cdot}_{655}$	$1{\cdot}_{72}$	$1{\cdot}_{753}$		
	Q mm (Versuchswerthe)	$3{\cdot}_{4}$	$11{\cdot}_{5}$	$15{\cdot}_{4}$	$18{\cdot}_{3}$	$20{\cdot}_{8}$	$23{\cdot}_{5}$	27	$33{\cdot}_{6}$	$41{\cdot}_{4}$	$48{\cdot}_{7}$	$56{\cdot}_{5}$	$61{\cdot}_{5}$		
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$4{\cdot}_{82}$	$11{\cdot}_{2}$	$14{\cdot}_{1}$	$16{\cdot}_{7}$	$19{\cdot}_{8}$	$22{\cdot}_{1}$	$24{\cdot}_{9}$	$30{\cdot}_{3}$	$36{\cdot}_{9}$	$44{\cdot}_{1}$	$51{\cdot}_{7}$	57		



Aluminium. Q kg $= 43{\cdot}_{25} \cdot Q$ mm, $\operatorname{tg}\beta = 1{\cdot}_{376}$, $y = 1$, $\lambda = 0{\cdot}_{29}$. Tabelle zu Tafel IX.

	Marken der Theilpunkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
	λ_D	0	$0{\cdot}_{05}$	$0{\cdot}_{10}$	$0{\cdot}_{15}$	$0{\cdot}_{20}$	$0{\cdot}_{30}$	$0{\cdot}_{40}$	$0{\cdot}_{60}$	$0{\cdot}_{80}$	$1{\cdot}_{00}$	$1{\cdot}_{20}$	$1{\cdot}_{40}$	$1{\cdot}_{563}$
	D_x mm	$3{\cdot}_{0}$	$3{\cdot}_{15}$	$3{\cdot}_{3}$	$3{\cdot}_{45}$	$3{\cdot}_{6}$	$3{\cdot}_{9}$	$4{\cdot}_{2}$	$4{\cdot}_{8}$	$5{\cdot}_{4}$	$6{\cdot}_{0}$	$6{\cdot}_{6}$	$7{\cdot}_{2}$	$7{\cdot}_{69}$
	Δ_x mm^2	$7{\cdot}_{07}$	$7{\cdot}_{79}$	$8{\cdot}_{55}$	$9{\cdot}_{35}$	$10{\cdot}_{18}$	$11{\cdot}_{95}$	$13{\cdot}_{85}$	$18{\cdot}_{1}$	$22{\cdot}_{9}$	$28{\cdot}_{27}$	$34{\cdot}_{21}$	$40{\cdot}_{72}$	$46{\cdot}_{465}$
	Nf (1 kg = 1 mm)	$3{\cdot}_{01}$	$6{\cdot}_{04}$	$8{\cdot}_{82}$	$9{\cdot}_{9}$	$10{\cdot}_{58}$	$10{\cdot}_{58}$	$10{\cdot}_{58}$	$10{\cdot}_{58}$	$10{\cdot}_{58}$	$10{\cdot}_{58}$	$10{\cdot}_{58}$	$10{\cdot}_{58}$	$10{\cdot}_{58}$
	$Nf \operatorname{tg}\beta$	$4{\cdot}_{14}$	$9{\cdot}_{5}$	$12{\cdot}_{1}$	$13{\cdot}_{6}$	$14{\cdot}_{55}$	$14{\cdot}_{55}$	$14{\cdot}_{55}$	$14{\cdot}_{55}$	$14{\cdot}_{55}$	$14{\cdot}_{55}$	$14{\cdot}_{55}$	$14{\cdot}_{55}$	$14{\cdot}_{55}$
$\delta_0 = 4{\cdot}_{47}$	δ_x mm	$4{\cdot}_{47}$	$4{\cdot}_{06}$	$3{\cdot}_{7}$	$3{\cdot}_{38}$	$3{\cdot}_{1}$	$2{\cdot}_{65}$	$2{\cdot}_{28}$	$1{\cdot}_{75}$	$1{\cdot}_{38}$	$1{\cdot}_{12}$	$0{\cdot}_{9}$	$0{\cdot}_{78}$	$0{\cdot}_{68}$
	n	—	—	—	—	—	$2{\cdot}_{02}$	$2{\cdot}_{53}$	$3{\cdot}_{77}$	$5{\cdot}_{37}$	$7{\cdot}_{38}$	$9{\cdot}_{87}$	$12{\cdot}_{7}$	$15{\cdot}_{6}$
	Z	—	—	—	—	—	$1{\cdot}_{0003}$	$1{\cdot}_{03}$	$1{\cdot}_{175}$	$1{\cdot}_{45}$	$1{\cdot}_{73}$	$2{\cdot}_{18}$	$2{\cdot}_{65}$	$3{\cdot}_{16}$
	Q mm (Versuchswerthe)	—	$1{\cdot}_{62}$	$1{\cdot}_{85}$	$2{\cdot}_{31}$	$2{\cdot}_{66}$	$3{\cdot}_{23}$	$4{\cdot}_{16}$	$7{\cdot}_{16}$	$11{\cdot}_{34}$	$18{\cdot}_{5}$	$25{\cdot}_{0}$	$37{\cdot}_{7}$	$50{\cdot}_{4}$
	Q mm (Rechn.-Werthe)	—	$1{\cdot}_{71}$	$2{\cdot}_{39}$	$3{\cdot}_{04}$	$3{\cdot}_{42}$	$3{\cdot}_{76}$	$4{\cdot}_{5}$	$6{\cdot}_{8}$	$10{\cdot}_{5}$	$15{\cdot}_{4}$	$23{\cdot}_{5}$	34	$46{\cdot}_{3}$
														$\lambda = 1{\cdot}_{446}$
$\delta = 3{\cdot}_{29}$	δ_x mm	$3{\cdot}_{29}$	$3{\cdot}_{0}$	$2{\cdot}_{72}$	$2{\cdot}_{49}$	$2{\cdot}_{29}$	$1{\cdot}_{95}$	$1{\cdot}_{68}$	$1{\cdot}_{29}$	$1{\cdot}_{02}$	$0{\cdot}_{82}$	$0{\cdot}_{68}$	$0{\cdot}_{57}$	$0{\cdot}_{55}$
	n	—	—	—	—	$2{\cdot}_{16}$	$2{\cdot}_{75}$	$3{\cdot}_{45}$	$5{\cdot}_{13}$	$7{\cdot}_{29}$	$10{\cdot}_{1}$	$13{\cdot}_{55}$	$17{\cdot}_{35}$	$18{\cdot}_{3}$
	Z	—	—	—	—	$1{\cdot}_{004}$	$1{\cdot}_{04}$	$1{\cdot}_{18}$	$1{\cdot}_{42}$	$1{\cdot}_{73}$	$2{\cdot}_{2}$	$2{\cdot}_{74}$	$3{\cdot}_{4}$	$3{\cdot}_{58}$
	Q mm (Versuchswerthe)	—	$1{\cdot}_{70}$	$1{\cdot}_{85}$	$2{\cdot}_{89}$	$3{\cdot}_{8}$	$4{\cdot}_{97}$	$6{\cdot}_{13}$	$9{\cdot}_{14}$	$13{\cdot}_{84}$	$21{\cdot}_{7}$	$35{\cdot}_{2}$	$55{\cdot}_{0}$	$58{\cdot}_{3}$
	Q mm (Rechn.-Werthe)	—	$1{\cdot}_{71}$	$2{\cdot}_{39}$	$2{\cdot}_{94}$	$3{\cdot}_{44}$	$3{\cdot}_{92}$	$5{\cdot}_{3}$	$8{\cdot}_{1}$	$12{\cdot}_{5}$	$19{\cdot}_{6}$	$29{\cdot}_{5}$	$43{\cdot}_{6}$	$47{\cdot}_{8}$



Masseinheiten

bei Druck:

Für die Druckkraft	Q	1 mm $= 43{\cdot}_{25}$ kg
Für die innere Reibung	Nf	1 mm = 1 kg
Für den Durchmesser	D mm	10 : 1
Für den Querschnitt	Δ mm^2	1 : 1
Für die Höhe	δ mm	10 : 1
Für den Werth von Z	Z	1 : 1

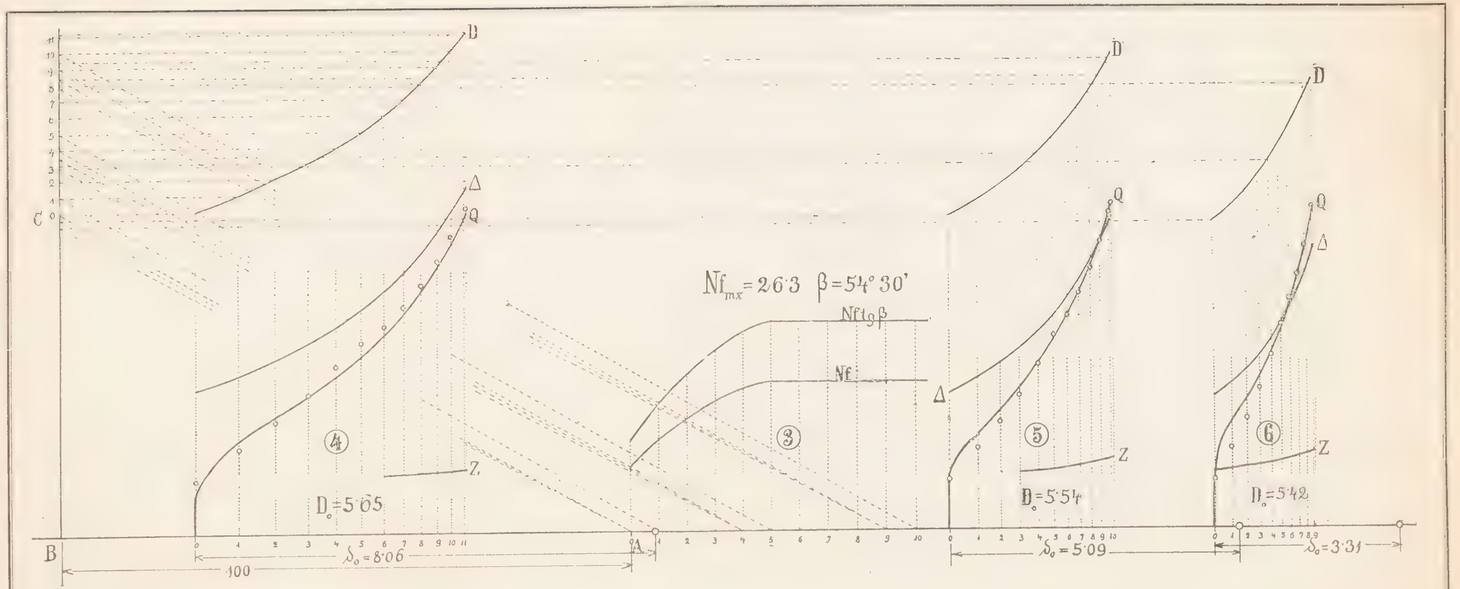
bei Zug:

Für die Zugkraft	P	1 mm $= 6{\cdot}_{415}$ kg
Für den Weg der Zugkraft	s mm	1 : 1

Tabelle zu Tafel X.

Kupferblech von 18 mm Stärke. Q kg $= 43{\cdot}_{25}$ Q mm, $\operatorname{tg}\beta = 1{\cdot}_{4}$, $y = 0{\cdot}_{55}$, $\lambda = 0{\cdot}_{25}$.

	Marken der Theilpunkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
	λ_D	0	$0{\cdot}_{05}$	$0{\cdot}_{10}$	$0{\cdot}_{15}$	$0{\cdot}_{20}$	$0{\cdot}_{25}$	$0{\cdot}_{30}$	$0{\cdot}_{35}$	$0{\cdot}_{40}$	$0{\cdot}_{45}$	$0{\cdot}_{50}$	$0{\cdot}_{55}$	$0{\cdot}_{56}$
	Nf (1 kg = 1 mm)	$11{\cdot}_{4}$	$16{\cdot}_{4}$	$19{\cdot}_{8}$	$22{\cdot}_{6}$	$25{\cdot}_{0}$	$26{\cdot}_{3}$	$26{\cdot}_{3}$	$26{\cdot}_{3}$	$26{\cdot}_{3}$	$26{\cdot}_{3}$	$26{\cdot}_{3}$	$26{\cdot}_{3}$	$26{\cdot}_{3}$
	$Nf \cdot \operatorname{tg}\beta$	$15{\cdot}_{05}$	$23{\cdot}_{0}$	$27{\cdot}_{7}$	$31{\cdot}_{6}$	$35{\cdot}_{0}$	$36{\cdot}_{8}$	$36{\cdot}_{8}$	$36{\cdot}_{8}$	$36{\cdot}_{8}$	$36{\cdot}_{8}$	$36{\cdot}_{8}$	$36{\cdot}_{8}$	$36{\cdot}_{8}$
$\delta_0 = 8{\cdot}_{06}$	D_x mm	$5{\cdot}_{65}$	$5{\cdot}_{91}$	$6{\cdot}_{22}$	$6{\cdot}_{5}$	$6{\cdot}_{78}$	$7{\cdot}_{06}$	$7{\cdot}_{34}$	$7{\cdot}_{63}$	$7{\cdot}_{91}$	$8{\cdot}_{19}$	$8{\cdot}_{47}$	$8{\cdot}_{75}$	$8{\cdot}_{81}$
	Δ_x mm²	$25{\cdot}_{07}$	$27{\cdot}_{71}$	$30{\cdot}_{39}$	$33{\cdot}_{18}$	$36{\cdot}_{10}$	$39{\cdot}_{15}$	$42{\cdot}_{31}$	$45{\cdot}_{72}$	$49{\cdot}_{14}$	$52{\cdot}_{68}$	$56{\cdot}_{35}$	$60{\cdot}_{13}$	$60{\cdot}_{96}$
	δ_x mm	$8{\cdot}_{06}$	$7{\cdot}_{28}$	$6{\cdot}_{64}$	$6{\cdot}_{08}$	$5{\cdot}_{58}$	$5{\cdot}_{15}$	$4{\cdot}_{76}$	$4{\cdot}_{41}$	$4{\cdot}_{1}$	$3{\cdot}_{83}$	$3{\cdot}_{58}$	$3{\cdot}_{35}$	$3{\cdot}_{32}$
	n	—	—	—	—	—	—	$2{\cdot}_{16}$	$2{\cdot}_{41}$	$2{\cdot}_{71}$	$2{\cdot}_{985}$	$3{\cdot}_{45}$	$3{\cdot}_{672}$	$3{\cdot}_{72}$
	Z	—	—	—	—	—	—	$1{\cdot}_{003}$	$1{\cdot}_{016}$	$1{\cdot}_{036}$	$1{\cdot}_{061}$	$1{\cdot}_{086}$	$1{\cdot}_{112}$	$1{\cdot}_{118}$
	Q mm (Versuchswerthe)	$7{\cdot}_{4}$	$16{\cdot}_{2}$	$20{\cdot}_{6}$	25	$27{\cdot}_{8}$	$31{\cdot}_{2}$	$34{\cdot}_{7}$	$39{\cdot}_{1}$	43	$46{\cdot}_{3}$	$50{\cdot}_{8}$	56	57
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$9{\cdot}_{2}$	$14{\cdot}_{7}$	$19{\cdot}_{5}$	$24{\cdot}_{2}$	$29{\cdot}_{1}$	$33{\cdot}_{2}$	36	$39{\cdot}_{4}$	$43{\cdot}_{3}$	$47{\cdot}_{5}$	$51{\cdot}_{9}$	$56{\cdot}_{6}$	$57{\cdot}_{5}$
$\delta_0 = 5{\cdot}_{09}$													$\lambda = 0{\cdot}_{52}$	
	D_x mm	$5{\cdot}_{54}$	$5{\cdot}_{82}$	$6{\cdot}_{1}$	$6{\cdot}_{37}$	$6{\cdot}_{65}$	$6{\cdot}_{92}$	$7{\cdot}_{2}$	$7{\cdot}_{48}$	$7{\cdot}_{76}$	$8{\cdot}_{03}$	$8{\cdot}_{31}$	$8{\cdot}_{42}$	
	Δ_x mm²	$24{\cdot}_{11}$	$26{\cdot}_{6}$	$29{\cdot}_{22}$	$31{\cdot}_{80}$	$34{\cdot}_{73}$	$37{\cdot}_{61}$	$40{\cdot}_{72}$	$43{\cdot}_{91}$	$47{\cdot}_{29}$	$50{\cdot}_{64}$	$54{\cdot}_{24}$	$55{\cdot}_{48}$	
													$\lambda = 0{\cdot}_{52}$	
	δ_x mm	$5{\cdot}_{09}$	$4{\cdot}_{6}$	$4{\cdot}_{2}$	$3{\cdot}_{85}$	$3{\cdot}_{53}$	$3{\cdot}_{26}$	$3{\cdot}_{01}$	$2{\cdot}_{79}$	$2{\cdot}_{59}$	$2{\cdot}_{42}$	$2{\cdot}_{26}$	$2{\cdot}_{2}$	
	n	—	—	—	$2{\cdot}_{3}$	$2{\cdot}_{56}$	$3{\cdot}_{0}$	$3{\cdot}_{26}$	$3{\cdot}_{6}$	$4{\cdot}_{05}$	$4{\cdot}_{655}$	$5{\cdot}_{16}$	$5{\cdot}_{37}$	
	Z	—	—	—	$1{\cdot}_{0093}$	$2{\cdot}_{027}$	$1{\cdot}_{062}$	$1{\cdot}_{082}$	$1{\cdot}_{109}$	$1{\cdot}_{137}$	$1{\cdot}_{18}$	$1{\cdot}_{205}$	$1{\cdot}_{22}$	
	Q mm (Versuchswerthe)	$11{\cdot}_{1}$	$16{\cdot}_{8}$	21	$25{\cdot}_{4}$	$29{\cdot}_{6}$	$33{\cdot}_{5}$	$37{\cdot}_{4}$	42	$46{\cdot}_{7}$	50	$54{\cdot}_{5}$	$57{\cdot}_{7}$	
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$8{\cdot}_{9}$	$14{\cdot}_{2}$	$18{\cdot}_{7}$	$23{\cdot}_{5}$	$28{\cdot}_{8}$	$34{\cdot}_{0}$	$37{\cdot}_{4}$	$41{\cdot}_{4}$	$45{\cdot}_{7}$	$50{\cdot}_{7}$	$56{\cdot}_{6}$	$57{\cdot}_{8}$	
$\delta_0 = 3{\cdot}_{31}$												$\lambda = 0{\cdot}_{462}$		
	D_x mm	$5{\cdot}_{42}$	$5{\cdot}_{69}$	$5{\cdot}_{96}$	$6{\cdot}_{21}$	$6{\cdot}_{5}$	$6{\cdot}_{78}$	$7{\cdot}_{05}$	$7{\cdot}_{32}$	$7{\cdot}_{59}$	$7{\cdot}_{86}$	$7{\cdot}_{94}$		
	Δ_x mm²	$23{\cdot}_{07}$	$25{\cdot}_{43}$	$27{\cdot}_{90}$	$30{\cdot}_{58}$	$33{\cdot}_{18}$	$36{\cdot}_{10}$	$39{\cdot}_{04}$	$42{\cdot}_{08}$	$45{\cdot}_{25}$	$48{\cdot}_{52}$	$49{\cdot}_{49}$		
	δ_x mm	$3{\cdot}_{31}$	$2{\cdot}_{99}$	$2{\cdot}_{72}$	$2{\cdot}_{49}$	$2{\cdot}_{29}$	$2{\cdot}_{12}$	$1{\cdot}_{95}$	$1{\cdot}_{80}$	$1{\cdot}_{68}$	$1{\cdot}_{57}$	$1{\cdot}_{51}$		
	n	$2{\cdot}_{2}$	$2{\cdot}_{62}$	$3{\cdot}_{1}$	$3{\cdot}_{4}$	$3{\cdot}_{95}$	$4{\cdot}_{45}$	$5{\cdot}_{0}$	$5{\cdot}_{67}$	$6{\cdot}_{32}$	$7{\cdot}_{0}$	$7{\cdot}_{2}$		
	Z	$1{\cdot}_{0045}$	$1{\cdot}_{034}$	$1{\cdot}_{07}$	$1{\cdot}_{093}$	$1{\cdot}_{132}$	$1{\cdot}_{17}$	$1{\cdot}_{213}$	$1{\cdot}_{246}$	$1{\cdot}_{29}$	$1{\cdot}_{337}$	$1{\cdot}_{34}$		
	Q mm (Versuchswerthe)	$9{\cdot}_{25}$	$18{\cdot}_{9}$	24	$27{\cdot}_{5}$	$30{\cdot}_{5}$	$34{\cdot}_{9}$	$40{\cdot}_{7}$	$45{\cdot}_{1}$	50	$54{\cdot}_{5}$	$55{\cdot}_{9}$		
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$8{\cdot}_{6}$	14	$19{\cdot}_{1}$	$24{\cdot}_{4}$	$30{\cdot}_{4}$	$35{\cdot}_{9}$	$40{\cdot}_{6}$	$44{\cdot}_{5}$	$49{\cdot}_{7}$	55	$56{\cdot}_{5}$		



Masseinheiten

bei Druck:

Für die Druckkraft	Q	1 mm = $43{\cdot}_{25}$ kg
Für die innere Reibung	Nf	1 mm = 1 kg
Für den Durchmesser	D mm	10 : 1
Für den Querschnitt	Δ mm²	1 : 1
Für die Höhe	δ mm	10 : 1
Für den Werth von Z	Z	1 : 1

bei Zug:

Für die Zugkraft	P	1 mm = $43{\cdot}_{25}$ kg
Für den Weg der Zugkraft	s mm	1 : 1

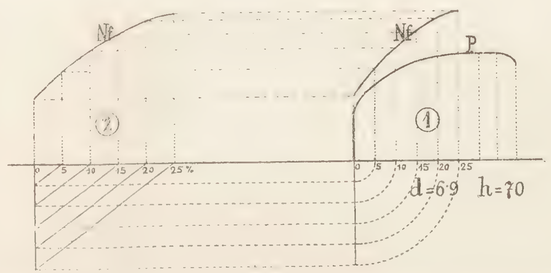
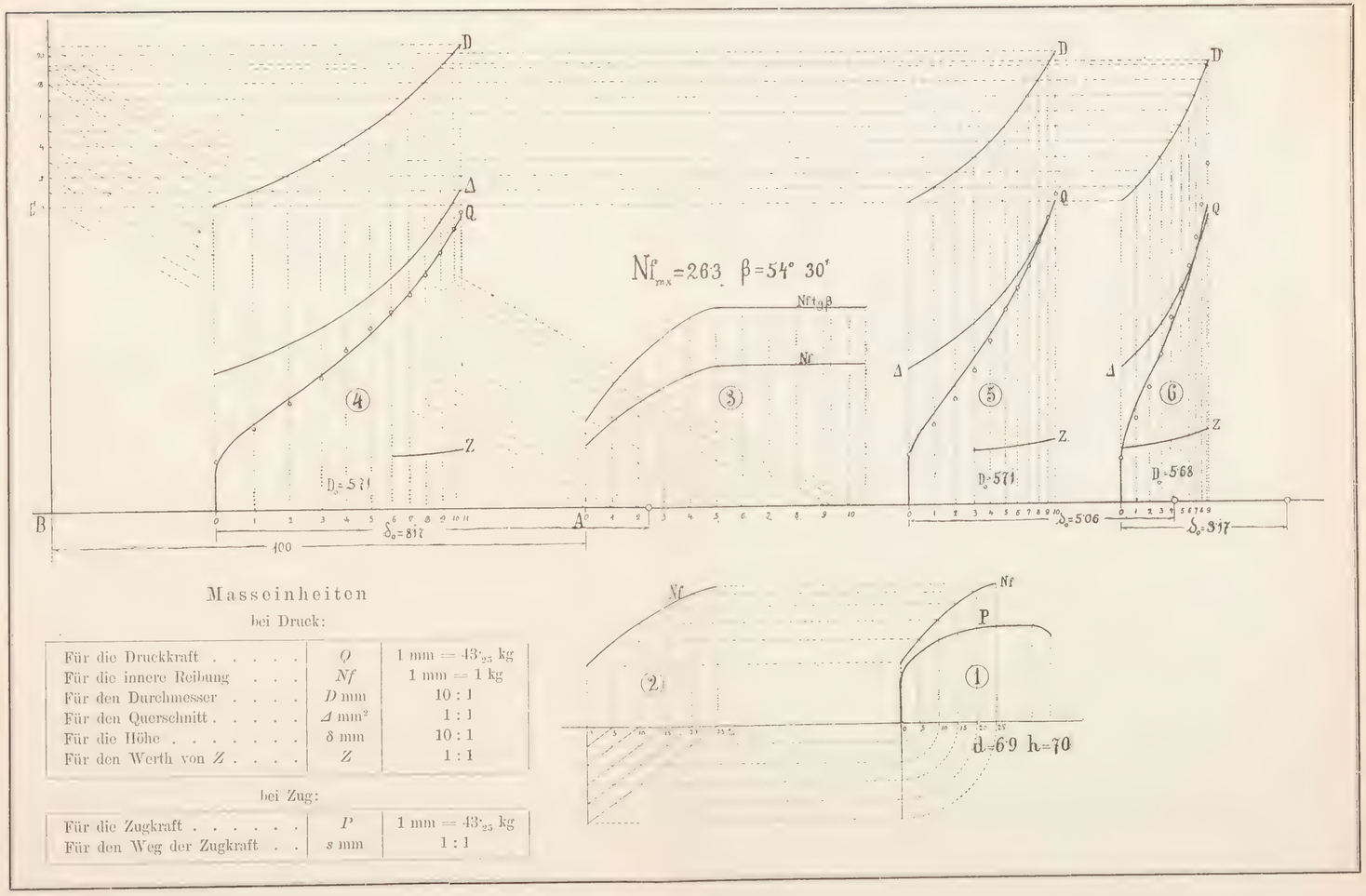


Tabelle zu Tafel XI.

Kupferblech von 15 mm Stärke. $Q\,\text{kg} = 43{\cdot}_{25}\,Q\,\text{mm}$, $\operatorname{tg}\beta = 1{\cdot}_{4}$, $y = 0{\cdot}_{55}$, $\lambda = 0{\cdot}_{25}$.

	Marken der Theilpunkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	λ_D	0	$0{\cdot}_{05}$	$0{\cdot}_{10}$	$0{\cdot}_{15}$	$0{\cdot}_{20}$	$0{\cdot}_{25}$	$0{\cdot}_{30}$	$0{\cdot}_{35}$	$0{\cdot}_{40}$	$0{\cdot}_{45}$	$0{\cdot}_{50}$	$0{\cdot}_{528}$
	D_x mm	$5{\cdot}_{71}$	$6{\cdot}_{00}$	$6{\cdot}_{28}$	$0{\cdot}_{57}$	$6{\cdot}_{85}$	$7{\cdot}_{14}$	$7{\cdot}_{42}$	$7{\cdot}_{71}$	$8{\cdot}_{00}$	$8{\cdot}_{28}$	$8{\cdot}_{56}$	$8{\cdot}_{72}$
	Δ_x mm²	$25{\cdot}_{61}$	$28{\cdot}_{27}$	$30{\cdot}_{97}$	$33{\cdot}_{9}$	$36{\cdot}_{85}$	$40{\cdot}_{03}$	$43{\cdot}_{24}$	$46{\cdot}_{69}$	$50{\cdot}_{27}$	$53{\cdot}_{85}$	$57{\cdot}_{5}$	$59{\cdot}_{7}$
	Nf (1 kg = 1 mm)	$11{\cdot}_{4}$	$16{\cdot}_{4}$	$19{\cdot}_{8}$	$22{\cdot}_{6}$	$25{\cdot}_{0}$	$26{\cdot}_{3}$	$26{\cdot}_{3}$	$26{\cdot}_{3}$	$26{\cdot}_{3}$	$26{\cdot}_{3}$	$26{\cdot}_{3}$	$26{\cdot}_{3}$
	$Nf \operatorname{tg}\beta$	$15{\cdot}_{05}$	$23{\cdot}_{0}$	$27{\cdot}_{7}$	$31{\cdot}_{6}$	$35{\cdot}_{0}$	$36{\cdot}_{8}$	$36{\cdot}_{8}$	$36{\cdot}_{8}$	$36{\cdot}_{8}$	$36{\cdot}_{8}$	$36{\cdot}_{8}$	$36{\cdot}_{8}$
	δ_x mm	$8{\cdot}_{15}$	$7{\cdot}_{4}$	$6{\cdot}_{76}$	$6{\cdot}_{16}$	$5{\cdot}_{68}$	$5{\cdot}_{22}$	$4{\cdot}_{83}$	$4{\cdot}_{49}$	$4{\cdot}_{17}$	$3{\cdot}_{89}$	$3{\cdot}_{64}$	$3{\cdot}_{5}$
	n	—	—	—	—	—	—	$2{\cdot}_{21}$	$2{\cdot}_{34}$	$2{\cdot}_{65}$	$2{\cdot}_{95}$	$3{\cdot}_{16}$	$3{\cdot}_{46}$
	Z	—	—	—	—	—	—	$1{\cdot}_{0016}$	$1{\cdot}_{012}$	$1{\cdot}_{033}$	$1{\cdot}_{058}$	$1{\cdot}_{074}$	$1{\cdot}_{088}$
	Q mm (Versuchswerthe)	$9{\cdot}_{25}$	$16{\cdot}_{2}$	$20{\cdot}_{8}$	$25{\cdot}_{4}$	$29{\cdot}_{4}$	$33{\cdot}_{5}$	37	41	$44{\cdot}_{6}$	48	51	$55{\cdot}_{5}$
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$9{\cdot}_{4}$	15	$19{\cdot}_{8}$	25	$29{\cdot}_{7}$	34	37	$40{\cdot}_{2}$	$44{\cdot}_{3}$	$48{\cdot}_{4}$	$52{\cdot}_{4}$	$55{\cdot}_{7}$
												$\lambda = 0{\cdot}_{188}$	
	δ_x mm	$5{\cdot}_{06}$	$4{\cdot}_{58}$	$4{\cdot}_{18}$	$3{\cdot}_{82}$	$3{\cdot}_{52}$	$3{\cdot}_{22}$	$3{\cdot}_{00}$	$2{\cdot}_{78}$	$2{\cdot}_{58}$	$2{\cdot}_{41}$	$2{\cdot}_{28}$	
	n	—	—	—	$2{\cdot}_{1}$	$2{\cdot}_{71}$	$3{\cdot}_{21}$	$3{\cdot}_{57}$	$3{\cdot}_{87}$	$4{\cdot}_{32}$	$4{\cdot}_{74}$	$5{\cdot}_{1}$	
	Z	—	—	—	$1{\cdot}_{0015}$	$1{\cdot}_{037}$	$1{\cdot}_{077}$	$1{\cdot}_{106}$	$1{\cdot}_{128}$	$1{\cdot}_{16}$	$1{\cdot}_{19}$	$1{\cdot}_{213}$	
	Q mm (Versuchswerthe)	$10{\cdot}_{56}$	$17{\cdot}_{1}$	$22{\cdot}_{65}$	$28{\cdot}_{0}$	$32{\cdot}_{3}$	$37{\cdot}_{0}$	$41{\cdot}_{5}$	$44{\cdot}_{5}$	$50{\cdot}_{2}$	$53{\cdot}_{8}$	$57{\cdot}_{3}$	
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$9{\cdot}_{5}$	15	$19{\cdot}_{0}$	$25{\cdot}_{1}$	$30{\cdot}_{8}$	$37{\cdot}_{0}$	$41{\cdot}_{0}$	$44{\cdot}_{7}$	$49{\cdot}_{6}$	$54{\cdot}_{4}$	$58{\cdot}_{5}$	
												$\lambda = 0{\cdot}_{40}$	
	δ_x mm	$3{\cdot}_{17}$	$2{\cdot}_{88}$	$2{\cdot}_{62}$	$2{\cdot}_{4}$	$2{\cdot}_{21}$	$2{\cdot}_{03}$	$1{\cdot}_{88}$	$1{\cdot}_{74}$	$1{\cdot}_{615}$	$1{\cdot}_{51}$	$1{\cdot}_{5}$	
	n	$2{\cdot}_{54}$	$2{\cdot}_{92}$	$3{\cdot}_{43}$	$3{\cdot}_{92}$	$4{\cdot}_{49}$	$4{\cdot}_{9}$	$5{\cdot}_{64}$	$6{\cdot}_{05}$	$6{\cdot}_{59}$	$7{\cdot}_{05}$	$8{\cdot}_{05}$	
	Z	$1{\cdot}_{025}$	$1{\cdot}_{050}$	$1{\cdot}_{10}$	$1{\cdot}_{134}$	$1{\cdot}_{17}$	$1{\cdot}_{21}$	$1{\cdot}_{23}$	$1{\cdot}_{273}$	$1{\cdot}_{33}$	$1{\cdot}_{395}$	$1{\cdot}_{4}$	
	Q mm (Versuchswerthe)	$8{\cdot}_{85}$	$18{\cdot}_{0}$	$23{\cdot}_{6}$	$28{\cdot}_{4}$	$33{\cdot}_{5}$	$38{\cdot}_{5}$	43	47	$53{\cdot}_{2}$	56	$56{\cdot}_{7}$	
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$9{\cdot}_{7}$	$15{\cdot}_{8}$	$21{\cdot}_{8}$	28	$34{\cdot}_{8}$	$40{\cdot}_{7}$	$44{\cdot}_{7}$	$49{\cdot}_{9}$	$56{\cdot}_{1}$	63	$63{\cdot}_{7}$	

Kupferblech von 15 mm Stärke. **Tafel XI.**



Masseinheiten

bei Druck:

Für die Druckkraft	Q	1 mm = $43{\cdot}_{25}$ kg
Für die innere Reibung	Nf	1 mm = 1 kg
Für den Durchmesser	D mm	10 : 1
Für den Querschnitt	Δ mm²	1 : 1
Für die Höhe	δ mm	10 : 1
Für den Werth von Z	Z	1 : 1

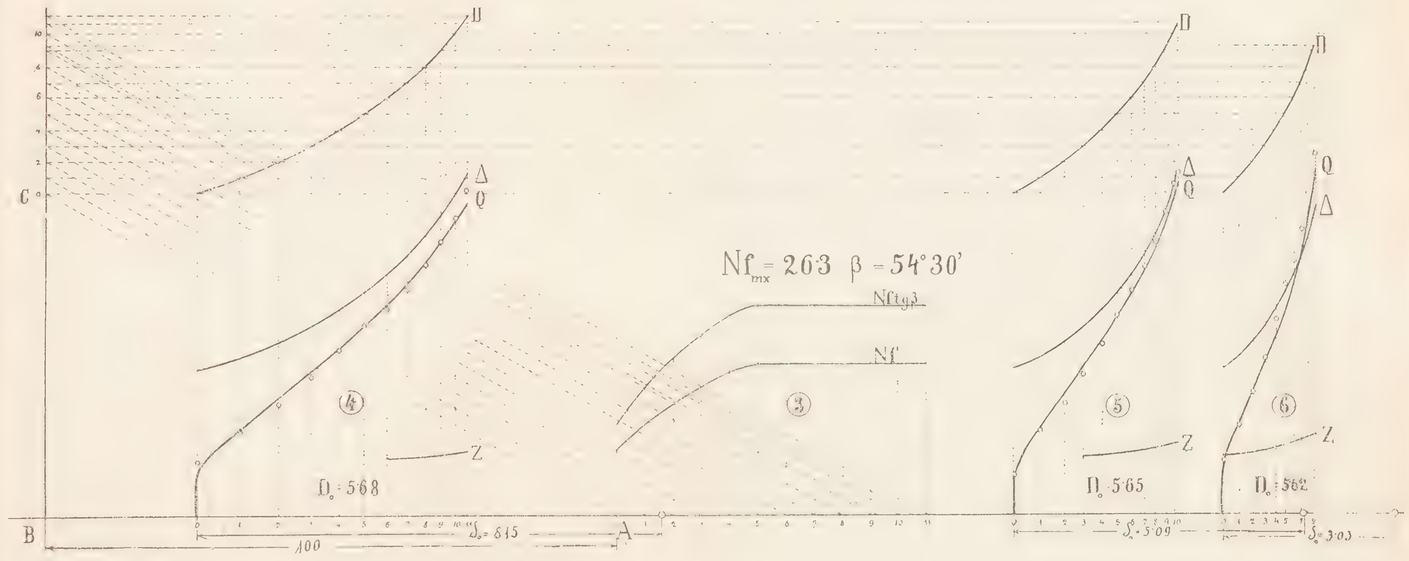
bei Zug:

Für die Zugkraft	P	1 mm = $43{\cdot}_{25}$ kg
Für den Weg der Zugkraft	s mm	1 : 1

Tabelle zu Tafel XII.

Kupferblech von 12 mm Stärke. Q kg $= 43{\cdot}_{25}$ Q mm, $\operatorname{tg}\beta = 1{\cdot}_{4}$, $y = 0{\cdot}_{55}$, $\lambda = 0{\cdot}_{..}$

Marken oder Theilpunkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
λ_D	0	$0{\cdot}_{05}$	$0{\cdot}_{10}$	$0{\cdot}_{15}$	$0{\cdot}_{20}$	$0{\cdot}_{25}$	$0{\cdot}_{30}$	$0{\cdot}_{35}$	$0{\cdot}_{40}$	$0{\cdot}_{45}$	$0{\cdot}_{50}$	$0{\cdot}_{..}$
D_x mm	$5{\cdot}_{68}$	$5{\cdot}_{96}$	$6{\cdot}_{25}$	$6{\cdot}_{54}$	$6{\cdot}_{82}$	$7{\cdot}_{1}$	$7{\cdot}_{39}$	$7{\cdot}_{66}$	$7{\cdot}_{95}$	$8{\cdot}_{23}$	$8{\cdot}_{..}$	$8{\cdot}_{..}$
Δ_x mm²	$25{\cdot}_{34}$	$27{\cdot}_{9}$	$30{\cdot}_{68}$	$33{\cdot}_{59}$	$36{\cdot}_{53}$	$39{\cdot}_{59}$	$42{\cdot}_{89}$	$46{\cdot}_{08}$	$49{\cdot}_{61}$	$53{\cdot}_{2}$	$57{\cdot}_{01}$	$60{\cdot}_{11}$
Nf (1 kg = 1 mm)	$11{\cdot}_{4}$	$16{\cdot}_{4}$	$19{\cdot}_{8}$	$22{\cdot}_{6}$	$25{\cdot}_{0}$	$26{\cdot}_{3}$	$26{\cdot}_{3}$	$26{\cdot}_{3}$	$26{\cdot}_{3}$	$26{\cdot}_{3}$	$26{\cdot}_{5}$	$26{\cdot}_{2}$
$Nf \operatorname{tg}\beta$	$15{\cdot}_{95}$	$23{\cdot}_{0}$	$27{\cdot}_{7}$	$31{\cdot}_{6}$	$35{\cdot}_{0}$	$36{\cdot}_{8}$	$36{\cdot}_{8}$	$36{\cdot}_{8}$	$36{\cdot}_{8}$	$36{\cdot}_{8}$	$36{\cdot}_{8}$	$36{\cdot}_{8}$
$\delta_0 = 8{\cdot}_{15}$												
δ_x mm	$8{\cdot}_{15}$	$7{\cdot}_{4}$	$6{\cdot}_{73}$	$6{\cdot}_{15}$	$5{\cdot}_{66}$	$5{\cdot}_{22}$	$4{\cdot}_{82}$	$4{\cdot}_{48}$	$4{\cdot}_{16}$	$3{\cdot}_{89}$	$3{\cdot}_{62}$	$3{\cdot}_{42}$
n	—	—	—	—	—	—	$2{\cdot}_{15}$	$2{\cdot}_{4}$	$2{\cdot}_{67}$	$2{\cdot}_{96}$	$3{\cdot}_{3}$	$3{\cdot}_{6}$
Z	—	—	—	—	—	—	$1{\cdot}_{003}$	$1{\cdot}_{015}$	$1{\cdot}_{035}$	$1{\cdot}_{059}$	$1{\cdot}_{085}$	$1{\cdot}_{108}$
Q mm (Versuchswerthe)	$7{\cdot}_{85}$	$15{\cdot}_{0}$	$20{\cdot}_{8}$	$25{\cdot}_{9}$	$29{\cdot}_{2}$	$33{\cdot}_{3}$	$37{\cdot}_{0}$	$41{\cdot}_{2}$	$45{\cdot}_{2}$	$48{\cdot}_{7}$	52	55
Q mm (Rechn.-Werthe)	$9{\cdot}_{2}$	$14{\cdot}_{7}$	$19{\cdot}_{5}$	$24{\cdot}_{3}$	$29{\cdot}_{2}$	$33{\cdot}_{3}$	$36{\cdot}_{4}$	$39{\cdot}_{3}$	$43{\cdot}_{8}$	$47{\cdot}_{8}$	$52{\cdot}_{5}$	$56{\cdot}_{9}$
$\lambda = 0{\cdot}_{..}$												
$\delta_0 = 5{\cdot}_{69}$												
δ_x mm	$5{\cdot}_{69}$	$4{\cdot}_{62}$	$4{\cdot}_{2}$	$3{\cdot}_{85}$	$3{\cdot}_{54}$	$3{\cdot}_{26}$	$3{\cdot}_{01}$	$2{\cdot}_{8}$	$2{\cdot}_{605}$	$2{\cdot}_{42}$	$2{\cdot}_{..}$	$2{\cdot}_{..}$
n	—	—	—	$2{\cdot}_{38}$	$2{\cdot}_{7}$	$3{\cdot}_{05}$	$3{\cdot}_{43}$	$3{\cdot}_{82}$	$4{\cdot}_{1}$	$4{\cdot}_{82}$	$5{\cdot}_{..}$	$5{\cdot}_{45}$
Z	—	—	—	$1{\cdot}_{013}$	$1{\cdot}_{037}$	$1{\cdot}_{065}$	$1{\cdot}_{095}$	$1{\cdot}_{125}$	$1{\cdot}_{145}$	$1{\cdot}_{195}$	$1{\cdot}_{..}$	$1{\cdot}_{..}$
Q mm (Versuchswerthe)	$6{\cdot}_{7}$	$15{\cdot}_{7}$	$21{\cdot}_{5}$	$26{\cdot}_{1}$	$30{\cdot}_{6}$	$35{\cdot}_{4}$	$39{\cdot}_{3}$	$43{\cdot}_{2}$	$46{\cdot}_{7}$	$51{\cdot}_{3}$	$56{\cdot}_{5}$	$58{\cdot}_{..}$
Q mm (Rechn.-Werthe)	$9{\cdot}_{2}$	$14{\cdot}_{7}$	$19{\cdot}_{52}$	$24{\cdot}_{6}$	$30{\cdot}_{0}$	$35{\cdot}_{2}$	$39{\cdot}_{4}$	$43{\cdot}_{5}$	$47{\cdot}_{7}$	$53{\cdot}_{2}$	$58{\cdot}_{1}$	$60{\cdot}_{1}$
$\lambda = 0{\cdot}_{..}$												
$\delta_0 = 3{\cdot}_{03}$												
δ_x mm	$3{\cdot}_{03}$	$2{\cdot}_{75}$	$2{\cdot}_{51}$	$2{\cdot}_{29}$	$2{\cdot}_{11}$	$1{\cdot}_{94}$	$1{\cdot}_{8}$	$1{\cdot}_{66}$	$1{\cdot}_{..}$	$1{\cdot}_{44}$	$1{\cdot}_{..}$	
n	$2{\cdot}_{59}$	$3{\cdot}_{0}$	$3{\cdot}_{45}$	$3{\cdot}_{95}$	$4{\cdot}_{47}$	$5{\cdot}_{06}$	$5{\cdot}_{68}$	$6{\cdot}_{..}$	$7{\cdot}_{10}$	$7{\cdot}_{90}$	$8{\cdot}_{..}$	
Z	$1{\cdot}_{028}$	$1{\cdot}_{061}$	$1{\cdot}_{098}$	$1{\cdot}_{133}$	$1{\cdot}_{17}$	$1{\cdot}_{213}$	$1{\cdot}_{235}$	$1{\cdot}_{..}$	$1{\cdot}_{..}$	$1{\cdot}_{..}$	$1{\cdot}_{..}$	
Q mm (Versuchswerthe)	$8{\cdot}_{78}$	$16{\cdot}_{2}$	$21{\cdot}_{9}$	$27{\cdot}_{7}$	$32{\cdot}_{1}$	$36{\cdot}_{2}$	$40{\cdot}_{5}$	47	$53{\cdot}_{1}$	$58{\cdot}_{9}$	$61{\cdot}_{0}$	
Q mm Rechn.-Werthe)	$9{\cdot}_{5}$	$15{\cdot}_{6}$	$21{\cdot}_{4}$	$27{\cdot}_{7}$	$34{\cdot}_{1}$	$40{\cdot}_{4}$	$44{\cdot}_{5}$	50	$56{\cdot}_{3}$	$62{\cdot}_{6}$	$63{\cdot}_{2}$	



Masseinheiten

bei Druck:

Für die Druckkraft	Q	1 mm = $43{\cdot}_{25}$ kg
Für die innere Reibung	Nf	1 mm = 1 kg
Für den Durchmesser	D mm	10 : 1
Für den Querschnitt	Δ mm²	1 : 1
Für die Höhe	δ mm	10 : 1
Für den Werth von Z	Z	1 : 1

bei Zug:

Für die Zugkraft	P	1 mm = $43{\cdot}_{25}$ kg
Für den Weg der Zugkraft	s mm	1 : 1

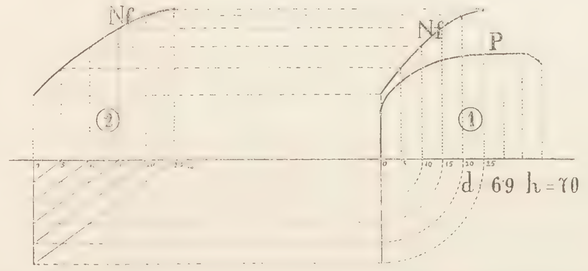


Tabelle zu Tafel XIII.

Prima Kesselblech. Q kg $= 43{\cdot}_{25}$ Q mm. $\quad tg\,\beta = 1{\cdot}_{51}$, $\quad y = 0{\cdot}_{55}$. $\quad \lambda = 0{\cdot}_{17}$.

	Marken der Theilpunkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	λ_D mm	0	$0{\cdot}_{03}$	$0{\cdot}_{06}$	$0{\cdot}_{09}$	$0{\cdot}_{12}$	$0{\cdot}_{15}$	$0{\cdot}_{18}$	$0{\cdot}_{21}$	$0{\cdot}_{24}$	$0{\cdot}_{27}$	$0{\cdot}_{30}$	$0{\cdot}_{32}$
	D_x mm	$5{\cdot}_{67}$	$5{\cdot}_{84}$	$6{\cdot}_{01}$	$6{\cdot}_{18}$	$6{\cdot}_{35}$	$6{\cdot}_{50}$	$6{\cdot}_{68}$	$6{\cdot}_{83}$	$7{\cdot}_{01}$	$7{\cdot}_{}$	$7{\cdot}_{36}$	$7{\cdot}_{49}$
	Δ_x mm²	$25{\cdot}_{25}$	$26{\cdot}_{79}$	$28{\cdot}_{32}$	$30{\cdot}_{6}$	$31{\cdot}_{87}$	$33{\cdot}_{1}$	$35{\cdot}_{05}$	$36{\cdot}_{36}$	$38{\cdot}_{}$	$40{\cdot}_{72}$	$42{\cdot}_{54}$	$44{\cdot}_{1}$
	Nf (1 kg = 1 mm)	$18{\cdot}_{63}$	$23{\cdot}_{7}$	$29{\cdot}_{5}$	$31{\cdot}_{5}$	$33{\cdot}_{5}$	$35{\cdot}_{0}$	$36{\cdot}_{0}$	$36{\cdot}_{0}$	$36{\cdot}_{0}$	$36{\cdot}_{0}$	$36{\cdot}_{0}$	$36{\cdot}_{0}$
	$Nf\,tg\,\beta$	$27{\cdot}_{6}$	$35{\cdot}_{8}$	$44{\cdot}_{3}$	$47{\cdot}_{3}$	$50{\cdot}_{3}$	$52{\cdot}_{8}$	$54{\cdot}_{1}$	$54{\cdot}_{1}$	$54{\cdot}_{1}$	$54{\cdot}_{1}$	$54{\cdot}_{1}$	$54{\cdot}_{1}$
	δ_x mm	$8{\cdot}_{12}$	$7{\cdot}_{65}$	$7{\cdot}_{03}$	$6{\cdot}_{54}$	$6{\cdot}_{18}$	$6{\cdot}_{14}$	$5{\cdot}_{86}$	$5{\cdot}_{55}$	$5{\cdot}_{28}$	$5{\cdot}_{01}$	$4{\cdot}_{8}$	$4{\cdot}_{65}$
	n	—									$2{\cdot}_{1}$	$2{\cdot}_{14}$	$2{\cdot}_{24}$
	Z	—							—		$1{\cdot}_{064}$	$1{\cdot}_{067}$	$1{\cdot}_{071}$
	Q mm (Versuchswerthe)	$10{\cdot}_{02}$	$22{\cdot}_{50}$	$28{\cdot}_{8}$	$33{\cdot}_{4}$	$37{\cdot}_{4}$	$40{\cdot}_{5}$	$43{\cdot}_{5}$	$47{\cdot}_{0}$	$49{\cdot}_{7}$	$52{\cdot}_{0}$	$54{\cdot}_{6}$	$56{\cdot}_{5}$
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$16{\cdot}_{1}$	$22{\cdot}_{5}$	$29{\cdot}_{0}$	$33{\cdot}_{0}$	$37{\cdot}_{0}$	$40{\cdot}_{5}$	$44{\cdot}_{0}$	$46{\cdot}_{5}$	$48{\cdot}_{5}$	$51{\cdot}_{1}$	$54{\cdot}_{0}$	$55{\cdot}_{45}$
												$\lambda = 0{\cdot}_{08}$	
	δ_x mm	$4{\cdot}_{78}$	$4{\cdot}_{24}$	$4{\cdot}_{04}$	$4{\cdot}_{01}$	$3{\cdot}_{84}$	$3{\cdot}_{61}$	$3{\cdot}_{48}$	$3{\cdot}_{36}$	$3{\cdot}_{19}$	$2{\cdot}_{96}$	$2{\cdot}_{80}$	
	n			$2{\cdot}_{14}$	$2{\cdot}_{31}$	$2{\cdot}_{6}$	$2{\cdot}_{73}$	$2{\cdot}_{96}$	$3{\cdot}_{16}$	$3{\cdot}_{45}$	$3{\cdot}_{7}$	$3{\cdot}_{74}$	
	Z			$1{\cdot}_{060}$	$1{\cdot}_{04}$	$1{\cdot}_{032}$	$1{\cdot}_{020}$	$1{\cdot}_{008}$	$1{\cdot}_{073}$	$1{\cdot}_{1}$	$1{\cdot}_{116}$	$2{\cdot}_{19}$	
	Q mm (Versuchswerthe)	$12{\cdot}_{48}$	$18{\cdot}_{5}$	$25{\cdot}_{5}$	$30{\cdot}_{5}$	$35{\cdot}_{0}$	$40{\cdot}_{3}$	$44{\cdot}_{6}$	$49{\cdot}_{5}$	$52{\cdot}_{7}$	$55{\cdot}_{5}$	$57{\cdot}_{5}$	
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$16{\cdot}_{1}$	$22{\cdot}_{7}$	$29{\cdot}_{2}$	$33{\cdot}_{2}$	$37{\cdot}_{5}$	$42{\cdot}_{05}$	$46{\cdot}_{5}$	$49{\cdot}_{5}$	$53{\cdot}_{5}$	$57{\cdot}_{2}$	$58{\cdot}_{5}$	
	δ_x mm	$3{\cdot}_{07}$	$2{\cdot}_{89}$	$2{\cdot}_{74}$	$2{\cdot}_{58}$	$2{\cdot}_{46}$	$2{\cdot}_{33}$	$2{\cdot}_{21}$	$2{\cdot}_{10}$	$2{\cdot}_{01}$			
	n	$2{\cdot}_{79}$	$3{\cdot}_{04}$	$3{\cdot}_{25}$	$3{\cdot}_{56}$	$3{\cdot}_{9}$	$4{\cdot}_{2}$	$4{\cdot}_{54}$	$4{\cdot}_{9}$	$5{\cdot}_{}$			
	Z	$1{\cdot}_{043}$	$1{\cdot}_{062}$	$1{\cdot}_{08}$	$1{\cdot}_{106}$	$1{\cdot}_{13}$	$1{\cdot}_{15}$	$1{\cdot}_{178}$	$1{\cdot}_{21}$	$1{\cdot}_{30}$			
	Q mm (Versuchswerthe)	$12{\cdot}_{48}$	$27{\cdot}_{1}$	$32{\cdot}_{0}$	$38{\cdot}_{4}$	$43{\cdot}_{0}$	$47{\cdot}_{3}$	$51{\cdot}_{0}$	$54{\cdot}_{7}$	$58{\cdot}_{2}$			
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$16{\cdot}_{1}$	$23{\cdot}_{5}$	$31{\cdot}_{5}$	$36{\cdot}_{5}$	$41{\cdot}_{8}$	$46{\cdot}_{7}$	$51{\cdot}_{7}$	$56{\cdot}_{}$	$59{\cdot}_{5}$			

Die Masseinheiten für Druck sind gleichwerthig mit jenen der Tafel XII. Für Zug sind es die folgenden: Zugkraft 1 mm = 555 kg, Weg der Zugkraft: $1 : 1{\cdot}_{04}$.
Analyse: $C = 0{\cdot}_{11}\,\%$, $Mn = 0{\cdot}_{54}\,\%$, $Si = 0{\cdot}_{061}\,\%$, $P = 0{\cdot}_{019}\,\%$.

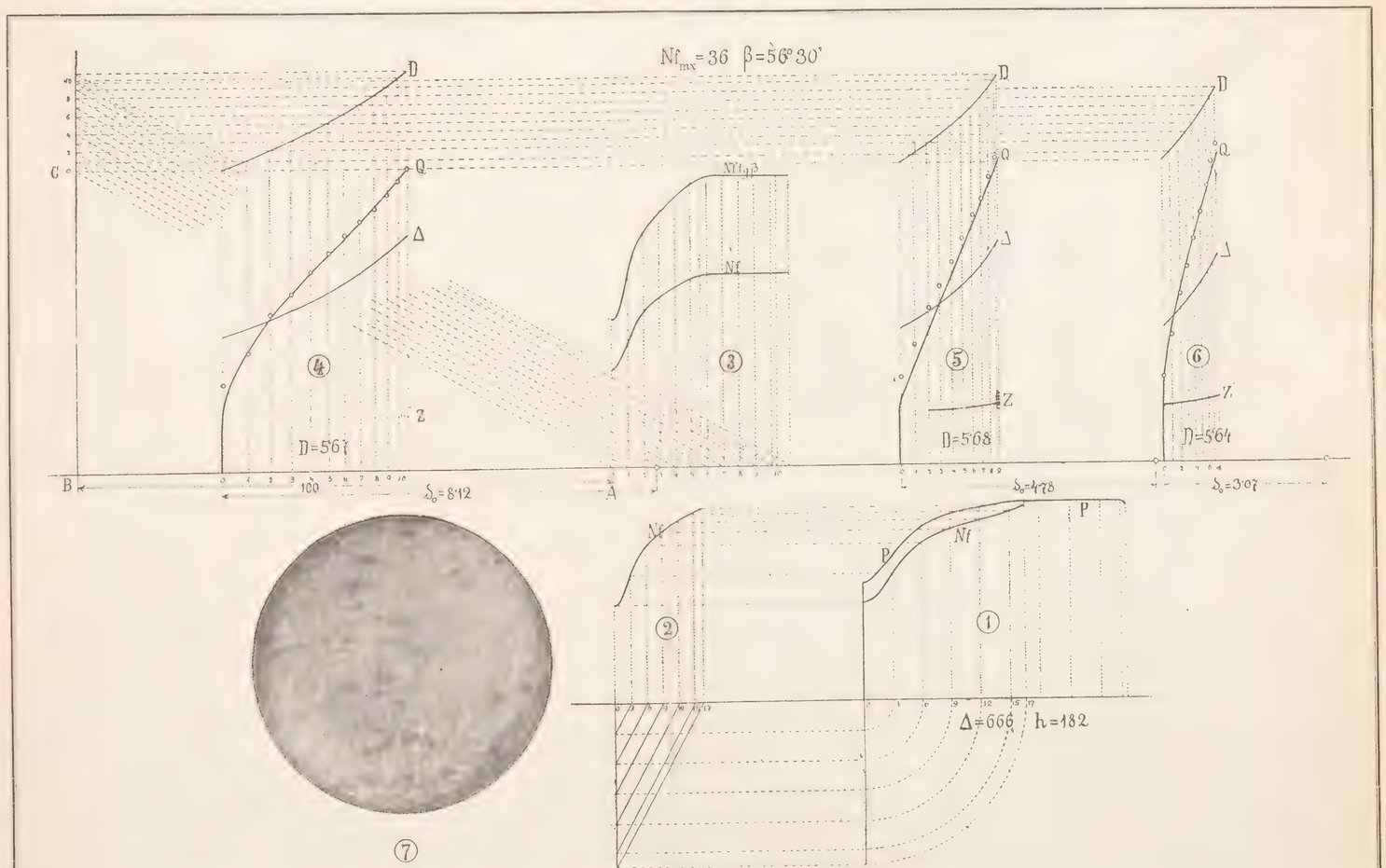


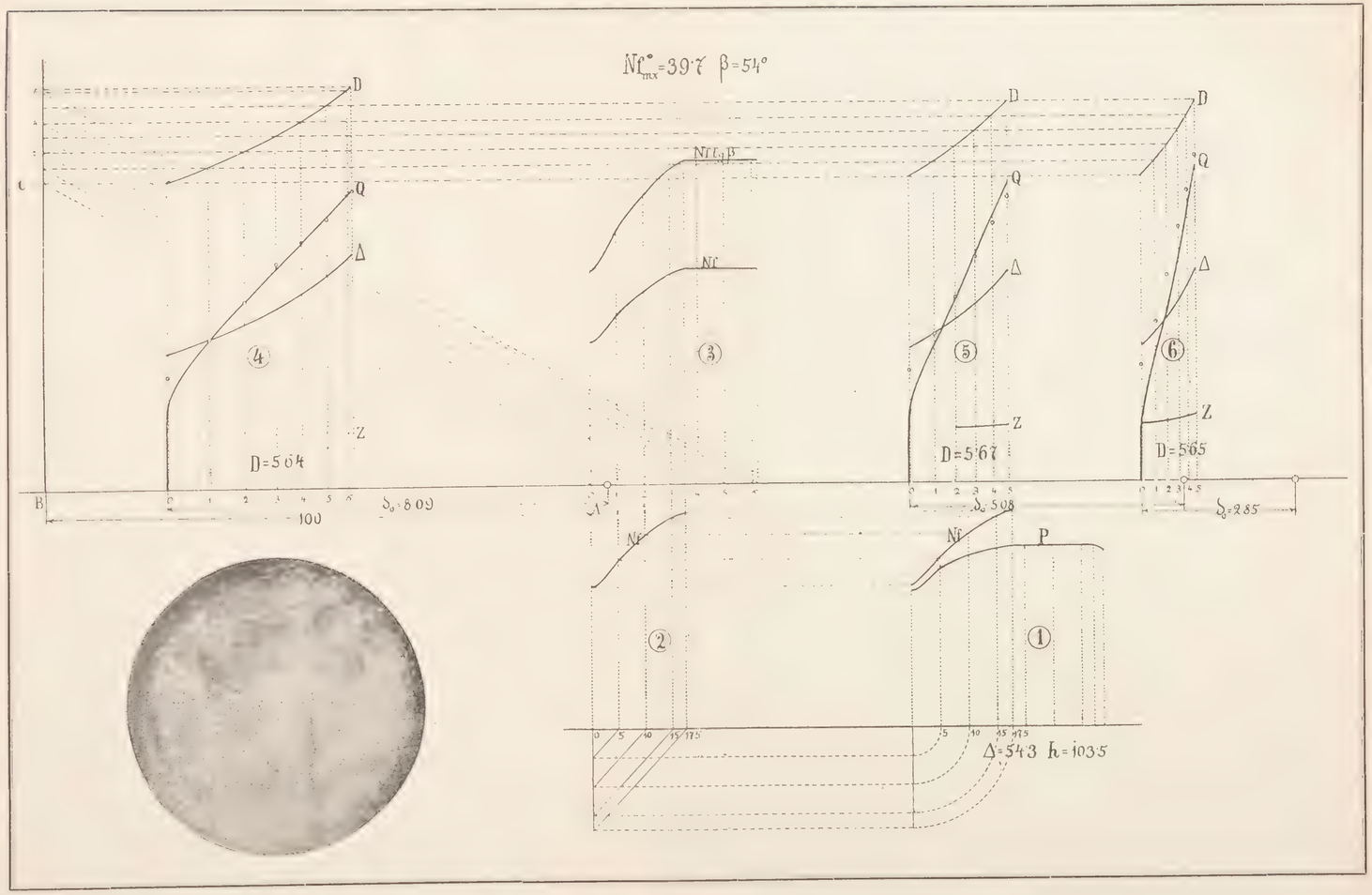
Tabelle zu Tafel XIV.

Secunda Kesselblech. Q kg $= 43{\cdot}_{5}$ Q mm, $\operatorname{tg}\beta = 1{\cdot}_{376}$, $y = 0{\cdot}_{55}$, $\lambda = 0{\cdot}_{175}$.

	Marken der Theilpunkte	0	1	2	3	4	5	6	
	λ_D	0	$0{\cdot}_{05}$	$0{\cdot}_{10}$	$0{\cdot}_{15}$	$0{\cdot}_{20}$	$0{\cdot}_{..}$	$0{\cdot}_{..}$	$0{\cdot}_{21}$
	D_x mm	$5{\cdot}_{64}$	$5{\cdot}_{92}$	$6{\cdot}_{20}$	$6{\cdot}_{48}$	$6{\cdot}_{74}$	$7{\cdot}_{05}$	$7{\cdot}_{32}$	$7{\cdot}_{39}$
	$\angle_{100}$	$24{\cdot}_{..}$	$27{\cdot}_{..}$	$30{\cdot}_{1..}$	$32{\cdot}_{..}$	$35{\cdot}_{..}$	$39{\cdot}_{01}$	$42{\cdot}_{..}$	$42{\cdot}_{..}$
	Nf (1 kg = 1 mm) . .	26	$31{\cdot}_{2}$	$35{\cdot}_{6}$	$38{\cdot}_{6}$	$39{\cdot}_{7}$	$39{\cdot}_{7}$	$39{\cdot}_{7}$	$39{\cdot}_{7}$
	$Nf \operatorname{tg}\beta$	$35{\cdot}_{8}$	$42{\cdot}_{9}$	49	$53{\cdot}_{1}$	$54{\cdot}_{6}$	$54{\cdot}_{6}$	$54{\cdot}_{6}$	$54{\cdot}_{6}$
$\delta_0 = 8{\cdot}_{00}$	δ_x mm	$8{\cdot}_{09}$	$7{\cdot}_{34}$	$6{\cdot}_{70}$	$6{\cdot}_{12}$	$5{\cdot}_{64}$	$5{\cdot}_{18}$	$4{\cdot}_{8}$	$4{\cdot}_{71}$
	n	—	—	—	—	—	—	$2{\cdot}_{1}$	$2{\cdot}_{16}$
	Z	—	—	—	—	—	—	$1{\cdot}_{0012}$	$1{\cdot}_{003}$
	Q mm (Versuchswerthe)	$14{\cdot}_{5}$	$27{\cdot}_{8}$	$36{\cdot}_{6}$	$40{\cdot}_{7}$	$45{\cdot}_{5}$	$50{\cdot}_{2}$	$54{\cdot}_{1}$	$55{\cdot}_{0}$
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$22{\cdot}_{7}$	$27{\cdot}_{4}$	$34{\cdot}_{2}$	$41{\cdot}_{4}$	$45{\cdot}_{3}$	$49{\cdot}_{3}$	$53{\cdot}_{3}$	$54{\cdot}_{5}$
$\delta_0 = 6{\cdot}_{18}$	δ_x mm	$5{\cdot}_{08}$	$4{\cdot}_{61}$	$4{\cdot}_{21}$	$3{\cdot}_{84}$	$3{\cdot}_{53}$	$3{\cdot}_{24}$		
	n	—	—	$2{\cdot}_{03}$	$2{\cdot}_{31}$	$2{\cdot}_{65}$	$3{\cdot}_{01}$		
	Z	—	—	$1{\cdot}_{001}$	$1{\cdot}_{01}$	$1{\cdot}_{033}$	$1{\cdot}_{061}$		
	Q mm (Versuchswerthe)	15	25	35	$42{\cdot}_{5}$	$48{\cdot}_{3}$	$55{\cdot}_{7}$		
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$20{\cdot}_{6}$	$27{\cdot}_{4}$	$34{\cdot}_{2}$	$41{\cdot}_{5}$	$46{\cdot}_{5}$	$52{\cdot}_{4}$		
$\delta_0 = 2{\cdot}_{85}$	δ_x mm	$2{\cdot}_{85}$	$2{\cdot}_{59}$	$2{\cdot}_{36}$	$2{\cdot}_{15}$	$1{\cdot}_{98}$	$1{\cdot}_{83}$		
	n	$2{\cdot}_{73}$	$3{\cdot}_{15}$	$3{\cdot}_{62}$	$4{\cdot}_{16}$	$4{\cdot}_{71}$	$5{\cdot}_{3}$		
	Z	$1{\cdot}_{04}$	$1{\cdot}_{073}$	$1{\cdot}_{11}$	$1{\cdot}_{139}$	$1{\cdot}_{19}$	$1{\cdot}_{2..}$		
	Q mm (Versuchswerthe)	12	22	32	$42{\cdot}_{5}$	$50{\cdot}_{8}$	$58{\cdot}_{5}$		
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$21{\cdot}_{5}$	$29{\cdot}_{4}$	$37{\cdot}_{9}$	$46{\cdot}_{9}$	$53{\cdot}_{5}$	60		

Secunda Kesselblech. **Tafel XIV.**

Masseinheiten siehe Tafel XIII. — Analyse: $C = 0{\cdot}_{14}\,\%$, $Mn = 0{\cdot}_{58}\,\%$, $Si = 9{\cdot}_{033}\,\%$, $P = 0{\cdot}_{044}\,\%$.



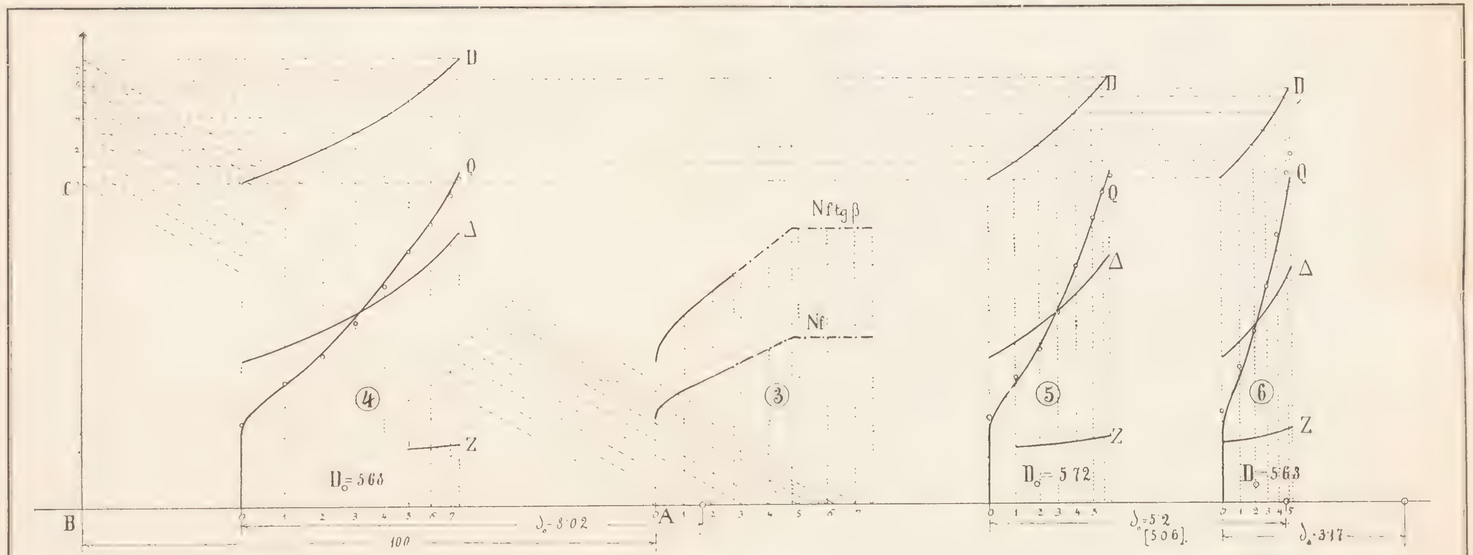
Messingblech von 18 mm Stärke.

Q kg $= 43{\cdot}_{25}$ Q mm, $\operatorname{tg}\beta = 1{\cdot}_{664}$, $\gamma = 0{\cdot}_{55}$, $\lambda = 0{\cdot}_{24}$

	Marken der Theilpunkte	0	1	2	3	4	5	6	7	
	λ_p	0	$0{\cdot}_{05}$	$0{\cdot}_{10}$	$0{\cdot}_{15}$	$0{\cdot}_{20}$	$0{\cdot}_{25}$	$0{\cdot}_{30}$	$0{\cdot}_{35}$	$0{\cdot}_{38}$
	D_0	$5{\cdot}_{65}$	$5{\cdot}_{66}$	$6{\cdot}_{07}$	$6{\cdot}_{48}$	$6{\cdot}_{82}$	$7{\cdot}_{1}$	$7{\cdot}_{38}$	$7{\cdot}_{67}$	$7{\cdot}_{89}$
	Δ	$25{\cdot}_{24}$	$27{\cdot}_{3}$	$30{\cdot}_{08}$	$33{\cdot}_{10}$	$36{\cdot}_{24}$	$39{\cdot}_{54}$	$42{\cdot}_{78}$	$46{\cdot}_{00}$	$48{\cdot}_{02}$
	Nf (1 kg = 1 mm)	15	20	$22{\cdot}_{5}$	$24{\cdot}_{5}$	$27{\cdot}_{5}$	29	29	29	29
	$Nf \operatorname{tg}\beta$	$25{\cdot}_{0}$	$33{\cdot}_{3}$	$37{\cdot}_{1}$	$41{\cdot}_{25}$	$45{\cdot}_{6}$	$48{\cdot}_{2}$	$48{\cdot}_{2}$	$48{\cdot}_{2}$	$48{\cdot}_{2}$
δ_0	δ_x mm	$8{\cdot}_{3}$	$7{\cdot}_{38}$	$6{\cdot}_{60}$	$6{\cdot}_{06}$	$5{\cdot}_{55}$	$5{\cdot}_{13}$	$4{\cdot}_{75}$	$4{\cdot}_{4}$	$4{\cdot}_{22}$
	n	—	—	—	—	—	$2{\cdot}_{8}$	$2{\cdot}_{56}$	$2{\cdot}_{9}$	$3{\cdot}_{08}$
	Z	–	—	—	—	—	$1{\cdot}_{0002}$	$1{\cdot}_{026}$	$1{\cdot}_{053}$	$1{\cdot}_{063}$
	Q mm (Versuchswerthe)	$14{\cdot}_{3}$	$21{\cdot}_{0}$	$27{\cdot}_{0}$	33	$39{\cdot}_{2}$	$44{\cdot}_{6}$	$50{\cdot}_{2}$	$55{\cdot}_{5}$	$58{\cdot}_{9}$
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$14{\cdot}_{5}$	$21{\cdot}_{5}$	$26{\cdot}_{5}$	$31{\cdot}_{5}$	$38{\cdot}_{7}$	$44{\cdot}_{5}$	$49{\cdot}_{0}$	$54{\cdot}_{0}$	$57{\cdot}_{0}$
									$\lambda = 0{\cdot}_{32}$	
δ_0	δ_x mm	$5{\cdot}_{3}$	$4{\cdot}_{52}$	$4{\cdot}_{05}$	$3{\cdot}_{67}$	$3{\cdot}_{61}$	$3{\cdot}_{38}$	$3{\cdot}_{11}$	$4{\cdot}_{48}$	
	n	—	$2{\cdot}_{44}$	$2{\cdot}_{7}$	$2{\cdot}_{8}$	$3{\cdot}_{1}$	$3{\cdot}_{65}$	$4{\cdot}_{0}$	$4{\cdot}_{17}$	
	Z		$1{\cdot}_{002}$	$1{\cdot}_{023}$	$1{\cdot}_{044}$	$1{\cdot}_{057}$	$1{\cdot}_{111}$	$1{\cdot}_{130}$	$1{\cdot}_{138}$	
	Q mm (Versuchswerthe)	$13{\cdot}_{8}$	$21{\cdot}_{2}$	$27{\cdot}_{3}$	$34{\cdot}_{0}$	$41{\cdot}_{5}$	$42{\cdot}_{3}$	$54{\cdot}_{8}$	$57{\cdot}_{8}$	
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$11{\cdot}_{8}$	$21{\cdot}_{2}$	$26{\cdot}_{5}$	$33{\cdot}_{4}$	$41{\cdot}_{5}$	$49{\cdot}_{7}$	$54{\cdot}_{0}$	$56{\cdot}_{8}$	
								$\lambda = 0{\cdot}_{225}$		
δ_0	δ_x mm	$3{\cdot}_{17}$	$2{\cdot}_{86}$	$2{\cdot}_{61}$	$2{\cdot}_{39}$	$2{\cdot}_{2}$	$2{\cdot}_{03}$	$1{\cdot}_{95}$		
	n	$3{\cdot}_{0}$	$3{\cdot}_{41}$	$3{\cdot}_{85}$	$4{\cdot}_{35}$	$5{\cdot}_{4}$	$5{\cdot}_{82}$	$6{\cdot}_{3}$		
	Z	$1{\cdot}_{001}$	$1{\cdot}_{003}$	$1{\cdot}_{135}$	$1{\cdot}_{171}$	$1{\cdot}_{22}$	$1{\cdot}_{27}$	$1{\cdot}_{28}$		
	Q mm (Versuchswerthe)	$14{\cdot}_{3}$	$21{\cdot}_{1}$	30	$37{\cdot}_{7}$	$46{\cdot}_{2}$	$53{\cdot}_{5}$	$57{\cdot}_{4}$		
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$15{\cdot}_{3}$	$23{\cdot}_{5}$	$29{\cdot}_{8}$	$37{\cdot}_{5}$	$46{\cdot}_{6}$	$56{\cdot}_{8}$	$61{\cdot}_{0}$		

Messingblech von 18 mm Stärke.

Analyse: $Cu = 62{\cdot}_{11}\,\%$, $Zn = 37{\cdot}_{8}\,\%$. Nf_{max} bei Zug = 24.



Masseinheiten

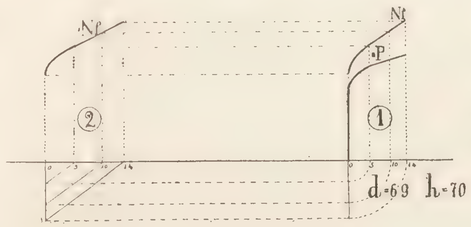
bei Druck:

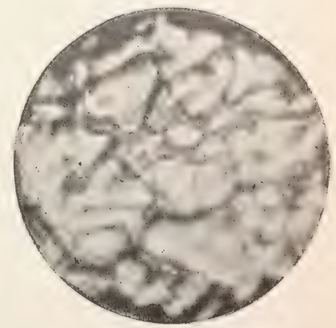
Für die Druckkraft	Q	1 mm $= 43{\cdot}_{25}$ kg
Für die innere Reibung	Nf	1 mm = 1 kg
Für den Durchmesser	D mm	10 : 1
Für den Querschnitt	Δ mm²	1 : 1
Für die Höhe	δ mm	10 : 1
Für den Weg von Z	Z	1 : 1

bei Zug:

Für die Zugkraft	P	1 mm $= 44{\cdot}_{25}$ kg
Für den Weg der Zugkraft	s mm	1 : 1

$Nf_{max} = 29$ $\beta = 59°$





Messingblech von 15 mm Stärke.

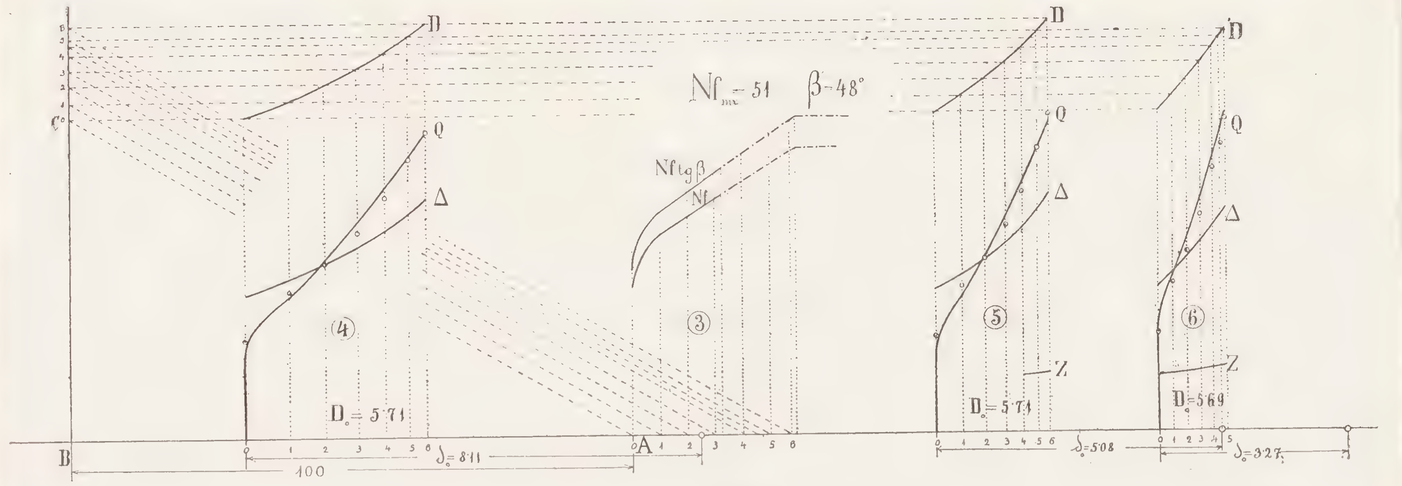
Q kg $= 43{\cdot}_{25}$ Q mm, $\quad \operatorname{tg}\beta = 1{\cdot}_{11}$, $y = 0{\cdot}_{55}$, $\lambda = 0{\cdot}_{295}$. Tabelle zu Tafel XVI.

	Marken der Theilpunkte	0	1	2	3	4	5	6	
	λ_D	0	$0{\cdot}_{05}$	$0{\cdot}_{10}$	$0{\cdot}_{15}$	$0{\cdot}_{20}$	$0{\cdot}_{25}$	$0{\cdot}_{30}$	
	D_x	$5{\cdot}_{71}$	$6{\cdot}_{00}$	$6{\cdot}_{29}$	$6{\cdot}_{58}$	$6{\cdot}_{85}$	$7{\cdot}_{12}$	$7{\cdot}_{36}$	
	Δ_x mm²	$25{\cdot}_{5}$	$28{\cdot}_{25}$	$31{\cdot}_{0}$	$33{\cdot}_{5}$	$36{\cdot}_{5}$	$4{\cdot}_{00}$	$4{\cdot}_{24}$	$\lambda = 0{\cdot}_{295}$
	Nf (1 kg = 1 mm)	$26{\cdot}_{6}$	$35{\cdot}_{9}$	$38{\cdot}_{9}$	$42{\cdot}_{0}$	$45{\cdot}_{0}$	$48{\cdot}_{2}$	$50{\cdot}_{5}$	51
	$Nf \operatorname{tg}\beta$	$29{\cdot}_{5}$	$39{\cdot}_{8}$	$43{\cdot}_{2}$	$46{\cdot}_{6}$	$50{\cdot}_{2}$	$53{\cdot}_{5}$	$55{\cdot}_{7}$	$56{\cdot}_{5}$
$\delta_0 = S_{11}$	δ_x mm	$8{\cdot}_{11}$	$7{\cdot}_{33}$	$6{\cdot}_{60}$	$6{\cdot}_{11}$	$5{\cdot}_{62}$	$5{\cdot}_{2}$	$4{\cdot}_{9}$	
	n	—	—	—	—	—	—	—	
	Z	—	—	—	—	—	—	—	
	Q mm (Versuchswerthe)	$13{\cdot}_{8}$	$25{\cdot}_{4}$	$31{\cdot}_{4}$	$38{\cdot}_{4}$	$43{\cdot}_{9}$	$50{\cdot}_{2}$	$54{\cdot}_{3}$	
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$17{\cdot}_{4}$	26	$30{\cdot}_{95}$	$36{\cdot}_{5}$	$43{\cdot}_{0}$	$49{\cdot}_{5}$	$54{\cdot}_{5}$	
$\delta_0 = 5{\cdot}_{08}$	δ_x mm	$5{\cdot}_{08}$	$4{\cdot}_{6}$	$4{\cdot}_{19}$	$3{\cdot}_{82}$	$3{\cdot}_{51}$	$3{\cdot}_{24}$	$3{\cdot}_{66}$	
	n	—	—	—	—	$2{\cdot}_{17}$	$2{\cdot}_{45}$	$2{\cdot}_{67}$	
	Z	—	—	—	—	$1{\cdot}_{005}$	$1{\cdot}_{02}$	$1{\cdot}_{035}$	
	Q mm (Versuchswerthe)	$12{\cdot}_{0}$	$24{\cdot}_{7}$	$31{\cdot}_{4}$	$38{\cdot}_{4}$	$44{\cdot}_{4}$	$50{\cdot}_{8}$	$55{\cdot}_{5}$	
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$17{\cdot}_{4}$	$26{\cdot}_{0}$	$31{\cdot}_{0}$	$36{\cdot}_{5}$	$42{\cdot}_{8}$	$50{\cdot}_{6}$	$56{\cdot}_{5}$	
$\delta_0 = 3{\cdot}_{36}$							$\lambda = 0{\cdot}_{235}$		
	δ_x mm	$3{\cdot}_{36}$	$3{\cdot}_{06}$	$2{\cdot}_{79}$	$2{\cdot}_{56}$	$2{\cdot}_{35}$	$2{\cdot}_{21}$		
	n	$2{\cdot}_{0}$	$2{\cdot}_{22}$	$2{\cdot}_{55}$	$2{\cdot}_{89}$	$3{\cdot}_{31}$	$3{\cdot}_{62}$		
	Z	$1{\cdot}_{0}$	$1{\cdot}_{006}$	$1{\cdot}_{026}$	$1{\cdot}_{086}$	$1{\cdot}_{086}$	$1{\cdot}_{11}$		
	Q mm (Versuchswerthe)	$23{\cdot}_{1}$	$30{\cdot}_{0}$	$37{\cdot}_{4}$	$45{\cdot}_{0}$	$50{\cdot}_{7}$	$57{\cdot}_{0}$		
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$17{\cdot}_{4}$	$26{\cdot}_{2}$	$31{\cdot}_{8}$	$38{\cdot}_{4}$	$47{\cdot}_{0}$	$56{\cdot}_{5}$		

Messingblech von 15 mm Stärke.

Tafel XVI.

Analyse: $Cu = 67{\cdot}_{82}\,\%$, $Zn = 31{\cdot}_{82}\,\%$.



Masseinheiten

bei Druck:

Für die Druckkraft	Q	1 mm = $43{\cdot}_{25}$ kg
Für die innere Reibung	Nf	1 mm = 1 kg
Für den Durchmesser	D mm	10 : 1
Für den Querschnitt	Δ mm²	1 : 1
Für die Höhe	δ mm	10 : 1
Für den Werth von Z	Z	1 : 1

bei Zug:

Für die Zugkraft	P	1 mm = $43{\cdot}_{25}$ kg
Für den Weg der Zugkraft	s mm	1 : 1

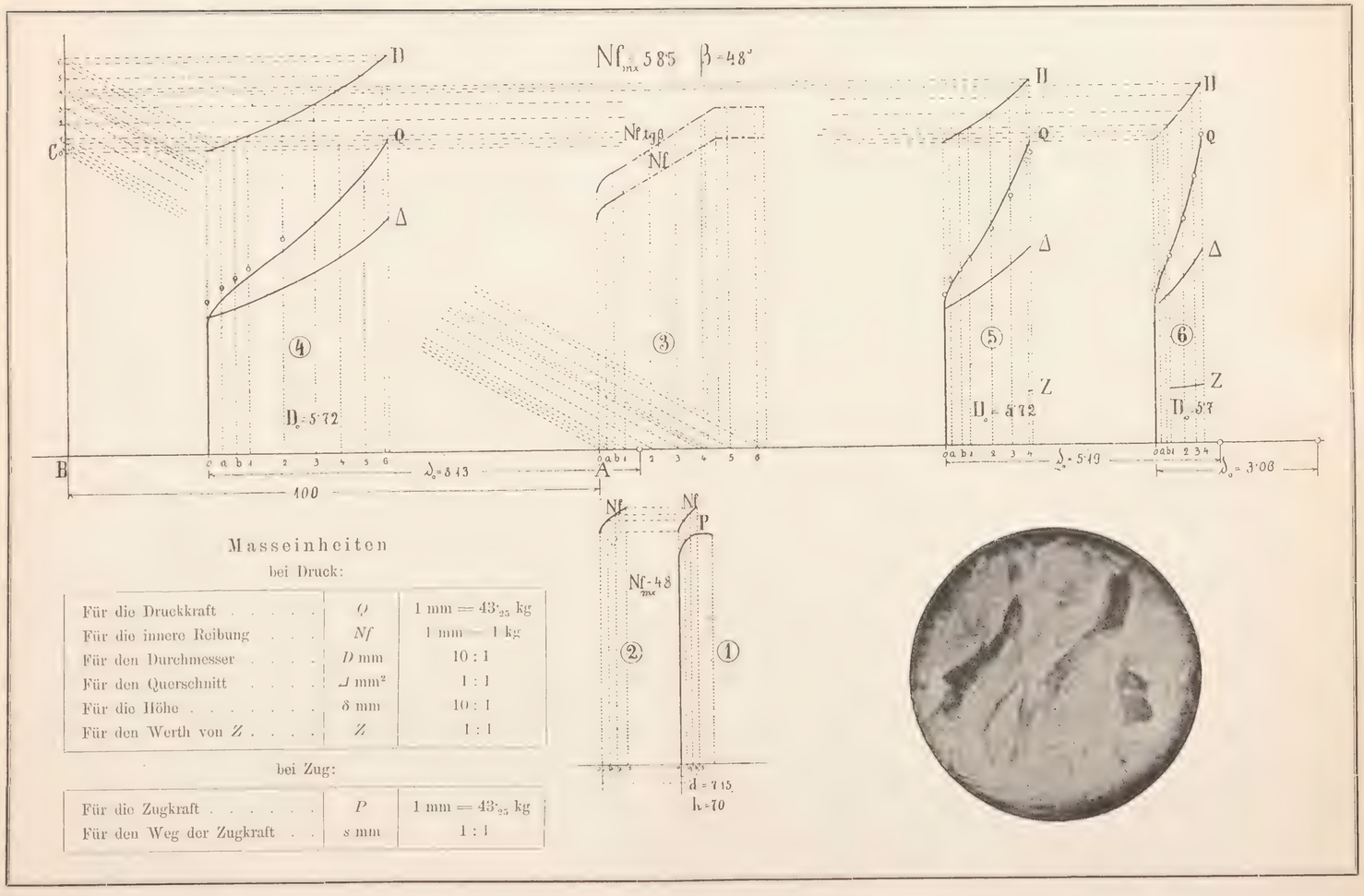
Messingblech von 10 mm Stärke.

Q kg $= 43{\cdot}_{25}$ Q mm, $\operatorname{tg}\beta = 1{\cdot}_{11}$. $y = 0{\cdot}_{25}$. $\lambda = 0{\cdot}_{25}$.

	Marken der Theilpunkte	0	a	b	1	2	3	4	5	6	
	λ_D mm	0	$0{\cdot}_{015}$	$0{\cdot}_{03}$	$0{\cdot}_{05}$	$0{\cdot}_{10}$	$0{\cdot}_{15}$	$0{\cdot}_{20}$	$0{\cdot}_{25}$	$0{\cdot}_{30}$	$0{\cdot}_{31}$
	D_x mm	$5{\cdot}_{72}$	$5{\cdot}_{8}$	$5{\cdot}_{9}$	$6{\cdot}_{0}$	$6{\cdot}_{29}$	$6{\cdot}_{58}$	$6{\cdot}_{86}$	$7{\cdot}_{15}$	$7{\cdot}_{43}$	$7{\cdot}_{5}$
	Δ_x mm²	$25{\cdot}_{52}$	$26{\cdot}_{42}$	$27{\cdot}_{34}$	$28{\cdot}_{27}$	$31{\cdot}_{07}$	$34{\cdot}_{0}$	$36{\cdot}_{96}$	$40{\cdot}_{15}$	$43{\cdot}_{36}$	$44{\cdot}_{2}$
	Nf (1 kg = 1 mm)	$43{\cdot}_{6}$	$46{\cdot}_{1}$	$47{\cdot}_{2}$	$48{\cdot}_{0}$	51	$53{\cdot}_{8}$	$56{\cdot}_{5}$	$57{\cdot}_{1}$	$53{\cdot}_{9}$	$58{\cdot}_{5}$
	$Nf \operatorname{tg}\beta$	$48{\cdot}_{4}$	$51{\cdot}_{2}$	$52{\cdot}_{3}$	$53{\cdot}_{25}$	$56{\cdot}_{6}$	$59{\cdot}_{8}$	$62{\cdot}_{6}$	$63{\cdot}_{4}$	65	65
$\delta_0 = \delta_{0{\cdot}13}$	δ_x mm	$8{\cdot}_{13}$	$7{\cdot}_{87}$	$7{\cdot}_{61}$	$7{\cdot}_{35}$	$6{\cdot}_{7}$	$6{\cdot}_{11}$	$5{\cdot}_{63}$	$5{\cdot}_{17}$	$4{\cdot}_{78}$	$4{\cdot}_{69}$
	n	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	Z	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	Q mm (Versuchswerthe)	$23{\cdot}_{4}$	$29{\cdot}_{1}$	$31{\cdot}_{7}$	$33{\cdot}_{8}$	$37{\cdot}_{9}$	$43{\cdot}_{5}$	$47{\cdot}_{4}$	$52{\cdot}_{7}$	$57{\cdot}_{3}$	$59{\cdot}_{0}$
	Q mm (Rechn.-Werthe)	28	$31{\cdot}_{2}$	$33{\cdot}_{0}$	$34{\cdot}_{8}$	$40{\cdot}_{7}$	$45{\cdot}_{4}$	$49{\cdot}_{4}$	$53{\cdot}_{2}$	$57{\cdot}_{7}$	$59{\cdot}_{0}$
									$\lambda = 0{\cdot}_{21}$		
$\delta_0 = \delta_{0{\cdot}19}$	δ_x mm	$5{\cdot}_{19}$	$5{\cdot}_{07}$	$4{\cdot}_{88}$	$4{\cdot}_{71}$	$4{\cdot}_{3}$	$3{\cdot}_{92}$	$3{\cdot}_{6}$	$3{\cdot}_{55}$		
	n	—	—	—	—	—	—	$2{\cdot}_{12}$	$2{\cdot}_{19}$		
	Z	—	—	—	—	—	—	$1{\cdot}_{002}$	$1{\cdot}_{002}$		
	Q mm (Versuchswerthe)	$27{\cdot}_{7}$	$30{\cdot}_{5}$	$32{\cdot}_{8}$	$35{\cdot}_{4}$	$41{\cdot}_{6}$	$49{\cdot}_{0}$	$55{\cdot}_{5}$	$57{\cdot}_{3}$		
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$28{\cdot}_{5}$	$31{\cdot}_{2}$	$33{\cdot}_{0}$	$34{\cdot}_{8}$	$40{\cdot}_{7}$	$47{\cdot}_{0}$	$53{\cdot}_{5}$	$55{\cdot}_{5}$		
								$\lambda = 0{\cdot}_{19}$			
$\delta_0 = 3{\cdot}_{06}$	δ_x mm	$3{\cdot}_{06}$	$2{\cdot}_{97}$	$2{\cdot}_{88}$	$2{\cdot}_{78}$	$2{\cdot}_{53}$	$2{\cdot}_{32}$	$2{\cdot}_{15}$			
	n	—	—	—	$2{\cdot}_{3}$	$2{\cdot}_{69}$	$3{\cdot}_{13}$	$3{\cdot}_{51}$			
	Z	—	—	—	$1{\cdot}_{0092}$	$1{\cdot}_{036}$	$1{\cdot}_{072}$	$1{\cdot}_{102}$			
	Q mm (Versuchswerthe)	$20{\cdot}_{1}$	$30{\cdot}_{5}$	$32{\cdot}_{8}$	$35{\cdot}_{4}$	$42{\cdot}_{5}$	$50{\cdot}_{2}$	$57{\cdot}_{0}$			
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$28{\cdot}_{5}$	$31{\cdot}_{2}$	$33{\cdot}_{0}$	$35{\cdot}_{2}$	$42{\cdot}_{2}$	$50{\cdot}_{4}$	$58{\cdot}_{2}$			

Messingblech von 12 mm Stärke.

Analyse: $Cu = 67{\cdot}_{35}\,{}^{0}{}_{0}$. $Zn = 32{\cdot}_{58}\,{}^{0}{}_{0}$.



Masseinheiten

bei Druck:

Für die Druckkraft	Q	1 mm = $43{\cdot}_{25}$ kg
Für die innere Reibung	Nf	1 mm = 1 kg
Für den Durchmesser	D mm	10 : 1
Für den Querschnitt	Δ mm²	1 : 1
Für die Höhe	δ mm	10 : 1
Für den Werth von Z	Z	1 : 1

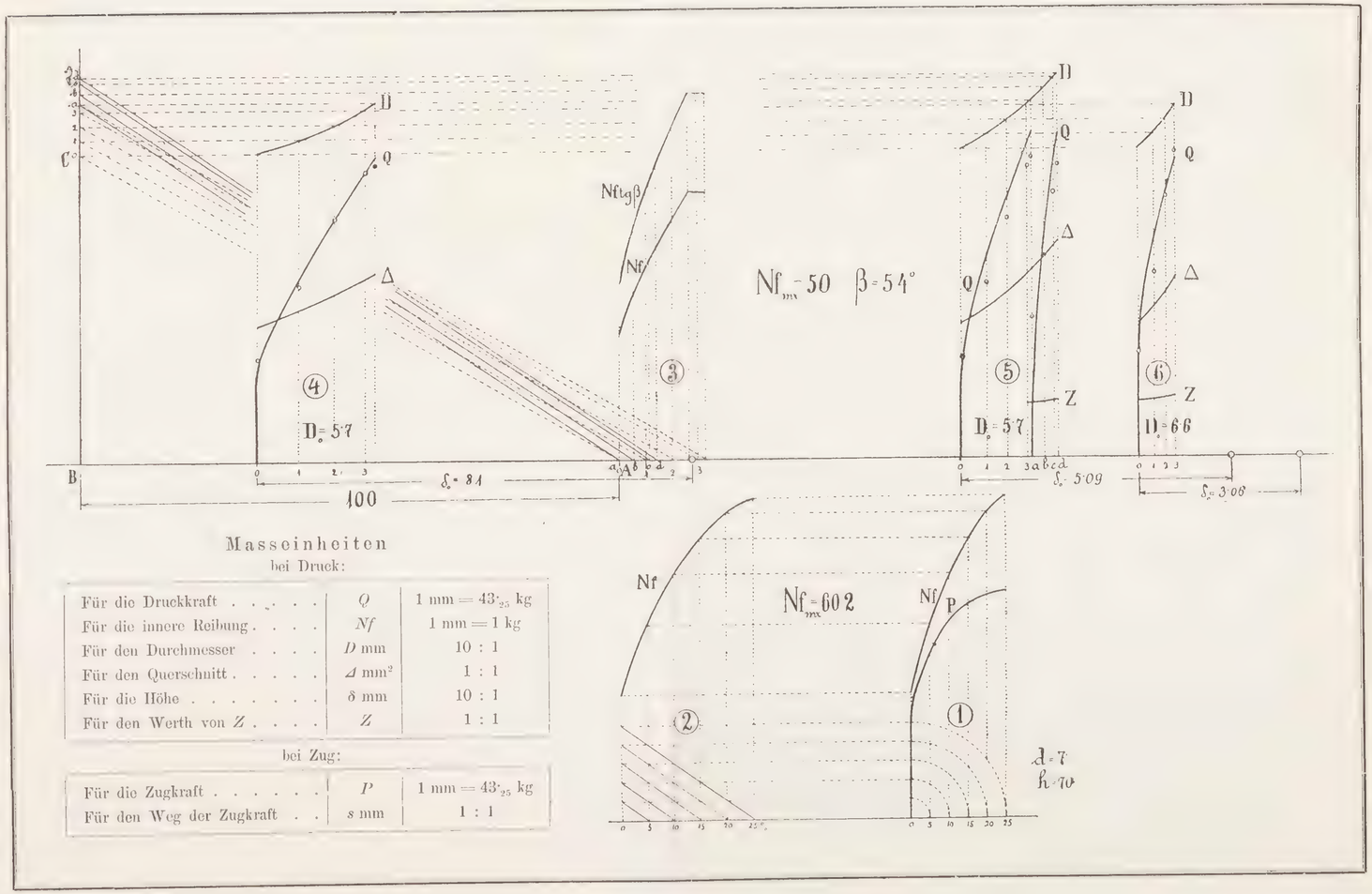
bei Zug:

Für die Zugkraft	P	1 mm = $43{\cdot}_{25}$ kg
Für den Weg der Zugkraft	s mm	1 : 1

Tabelle zu Tafel XVIII.

Deltametall. Q kg $= 43{\cdot}_{25}$ Q mm, $\operatorname{tg}\beta = 1{\cdot}_{376}$, $y = 0{\cdot}_{55}$, $\lambda = 0{\cdot}_{132}$.

	Marken der Theilpunkte	0	1	2	3	a	b	c	d
	λ_D	0	$0{\cdot}_{05}$	$0{\cdot}_{10}$	$0{\cdot}_{15}$	$0{\cdot}_{164}$	$0{\cdot}_{20}$	$0{\cdot}_{24}$	$0{\cdot}_{25}$
	D_x mm	$5{\cdot}_{7}$	$5{\cdot}_{99}$	$6{\cdot}_{26}$	$6{\cdot}_{55}$	$6{\cdot}_{63}$	$6{\cdot}_{84}$	$7{\cdot}_{03}$	$7{\cdot}_{12}$
	Δ_x mm^2	$25{\cdot}_{51}$	$28{\cdot}_{2}$	$30{\cdot}_{8}$	$33{\cdot}_{8}$	$34{\cdot}_{5}$	$36{\cdot}_{71}$	$38{\cdot}_{8}$	$39{\cdot}_{8}$
	Nf (1 kg = 1 mm)	$23{\cdot}_{6}$	$36{\cdot}_{3}$	$45{\cdot}_{8}$	$50{\cdot}_{0}$	$50{\cdot}_{0}$			
	Nf (1 kg = 1 mm) (nach dem Ausglühen)					$23{\cdot}_{6}$	$31{\cdot}_{5}$	$37{\cdot}_{5}$	$40{\cdot}_{3}$
	$Nf \operatorname{tg}\beta$	$32{\cdot}_{5}$	$50{\cdot}_{0}$	$63{\cdot}_{0}$	$68{\cdot}_{8}$	$68{\cdot}_{8}$			
	$Nf \operatorname{tg}\beta$ (nach dem Ausglühen)					$82{\cdot}_{5}$	$43{\cdot}_{1}$	$52{\cdot}_{8}$	$56{\cdot}_{5}$
$\delta_0 = 5{\cdot}_{09}$	δ_x mm	$5{\cdot}_{09}$	$4{\cdot}_{62}$	$4{\cdot}_{23}$	$3{\cdot}_{85}$	$3{\cdot}_{78}$	$3{\cdot}_{53}$	$3{\cdot}_{35}$	$3{\cdot}_{27}$
	n	—	—	—	$2{\cdot}_{33}$	$2{\cdot}_{41}$	$2{\cdot}_{67}$	$2{\cdot}_{89}$	$3{\cdot}_{13}$
	Z	—	—	—	$1{\cdot}_{01}$	$1{\cdot}_{019}$	$1{\cdot}_{05}$	$1{\cdot}_{051}$	$1{\cdot}_{063}$
	Q mm (Versuchswerthe)	$18{\cdot}_{0}$	$38{\cdot}_{0}$	$48{\cdot}_{5}$	$57{\cdot}_{5}$	$61{\cdot}_{2}$			
	Q (Versuchswerthe nach dem Ausglühen)					$15{\cdot}_{0}$	$39{\cdot}_{5}$	$53{\cdot}_{0}$	$61{\cdot}_{2}$
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$19{\cdot}_{1}$	$32{\cdot}_{6}$	$44{\cdot}_{8}$	$54{\cdot}_{2}$	$55{\cdot}_{8}$			
	Q (Rechnungswerthe nach dem Ausglühen)					$26{\cdot}_{3}$	$37{\cdot}_{9}$	$49{\cdot}_{8}$	$55{\cdot}_{1}$
$\delta_0 = 5{\cdot}_{07}$						$\lambda = 0{\cdot}_{17}$			
	δ_x	$5{\cdot}_{10}$	$7{\cdot}_{35}$	$6{\cdot}_{70}$	$6{\cdot}_{12}$	$5{\cdot}_{05}$			
	n	—	—	—	—	—			
	Z	—	—	—	—	—			
	Q mm (Versuchswerthe)	$12{\cdot}_{05}$	$34{\cdot}_{2}$	$43{\cdot}_{0}$	$54{\cdot}_{3}$	$57{\cdot}_{1}$			
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$19{\cdot}_{1}$	$32{\cdot}_{6}$	$44{\cdot}_{8}$	$54{\cdot}_{2}$	$55{\cdot}_{5}$			
$\delta_0 = 3{\cdot}_{08}$						$\lambda = 0{\cdot}_{11}$			
	δ_x	$3{\cdot}_{08}$	$2{\cdot}_{70}$	$2{\cdot}_{58}$	$2{\cdot}_{36}$				
	n	$2{\cdot}_{555}$	$2{\cdot}_{97}$	$3{\cdot}_{10}$	$3{\cdot}_{55}$				
	Z	$1{\cdot}_{059}$	$1{\cdot}_{080}$	$1{\cdot}_{092}$	$1{\cdot}_{120}$				
	Q mm (Versuchswerthe)	$19{\cdot}_{7}$	$39{\cdot}_{3}$	$49{\cdot}_{8}$	$56{\cdot}_{2}$				
	Q mm (Rechn.-Werthe)	$19{\cdot}_{6}$	$34{\cdot}_{5}$	$49{\cdot}_{0}$	$58{\cdot}_{0}$				



Masseinheiten

bei Druck:

Für die Druckkraft	Q	1 mm $= 43{\cdot}_{25}$ kg
Für die innere Reibung	Nf	1 mm = 1 kg
Für den Durchmesser	D mm	10 : 1
Für den Querschnitt	Δ mm^2	1 : 1
Für die Höhe	δ mm	10 : 1
Für den Werth von Z	Z	1 : 1

bei Zug:

Für die Zugkraft	P	1 mm $= 43{\cdot}_{25}$ kg
Für den Weg der Zugkraft	s mm	1 : 1

Masseinheiten:

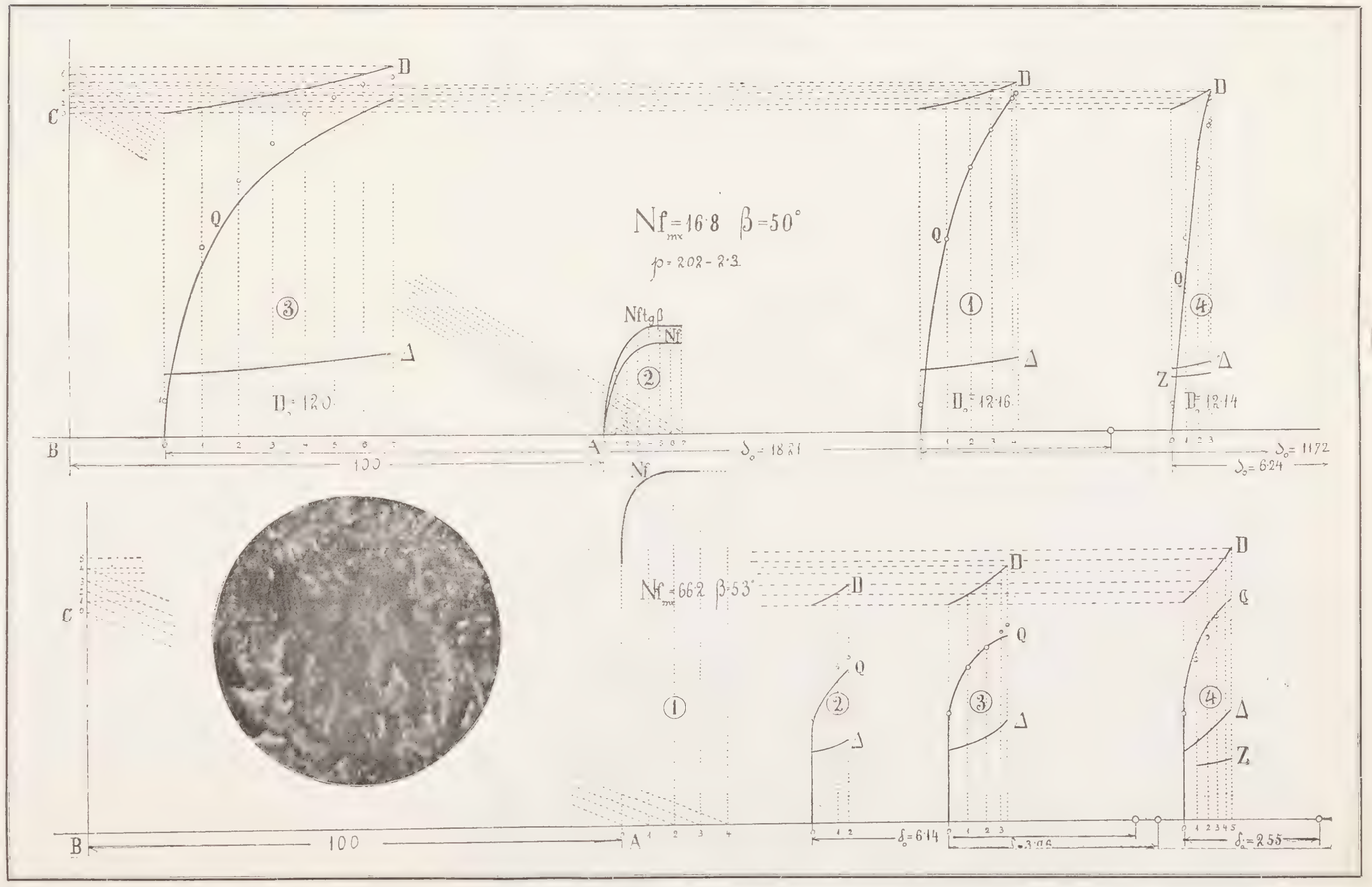
Zink.		Graues Gusseisen.	
Für den Durchmesser	D mm 10 : 2	Für den Durchmesser	D mm 10 : 1
Für den Querschnitt	Δ mm² 1 : 10	Für den Querschnitt	Δ mm² 1 : 1
Für die Höhe	δ mm 10 : 1	Für die Höhe	δ mm 10 : 1

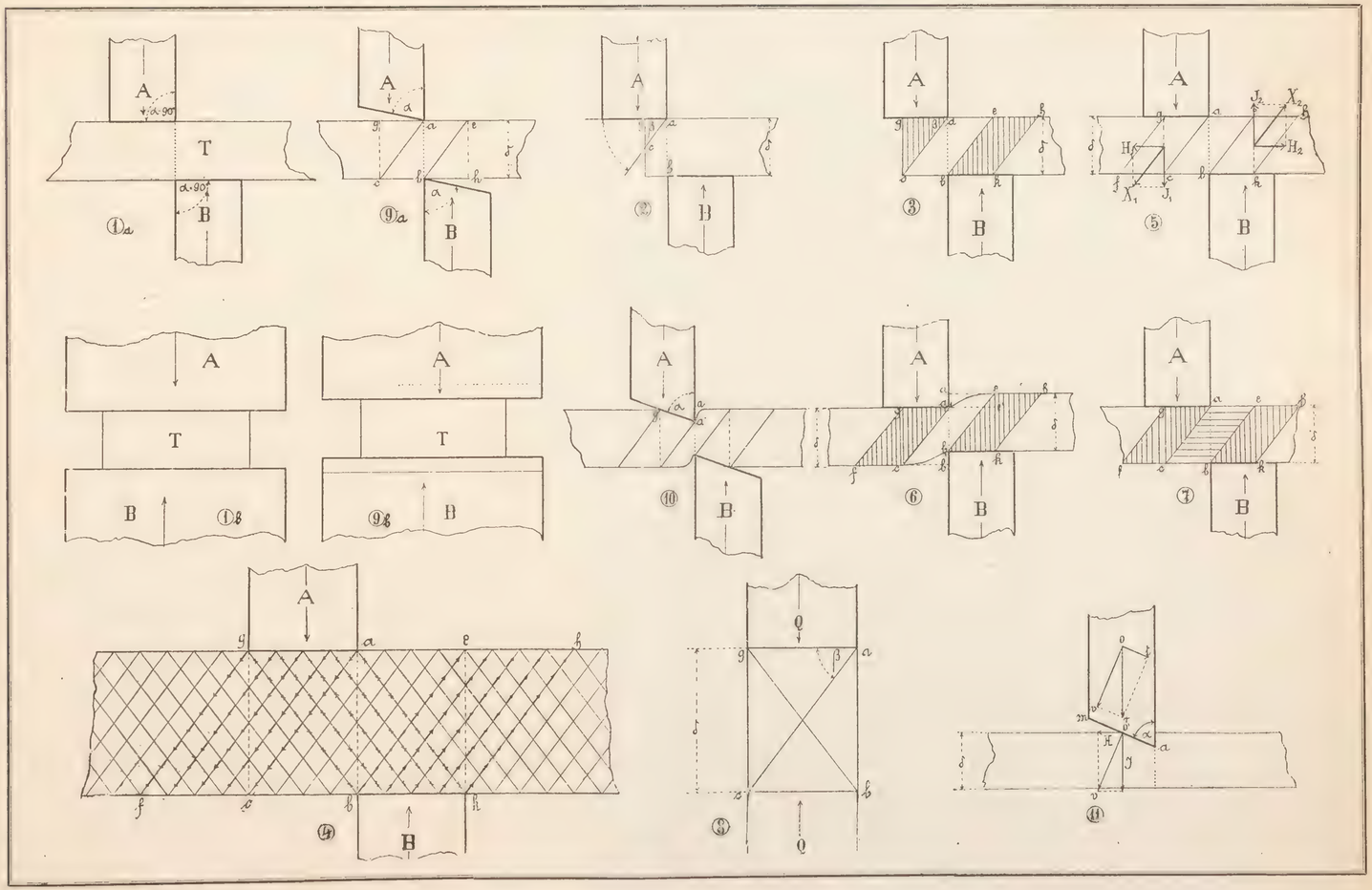
Tabelle zu Tafel XIX.

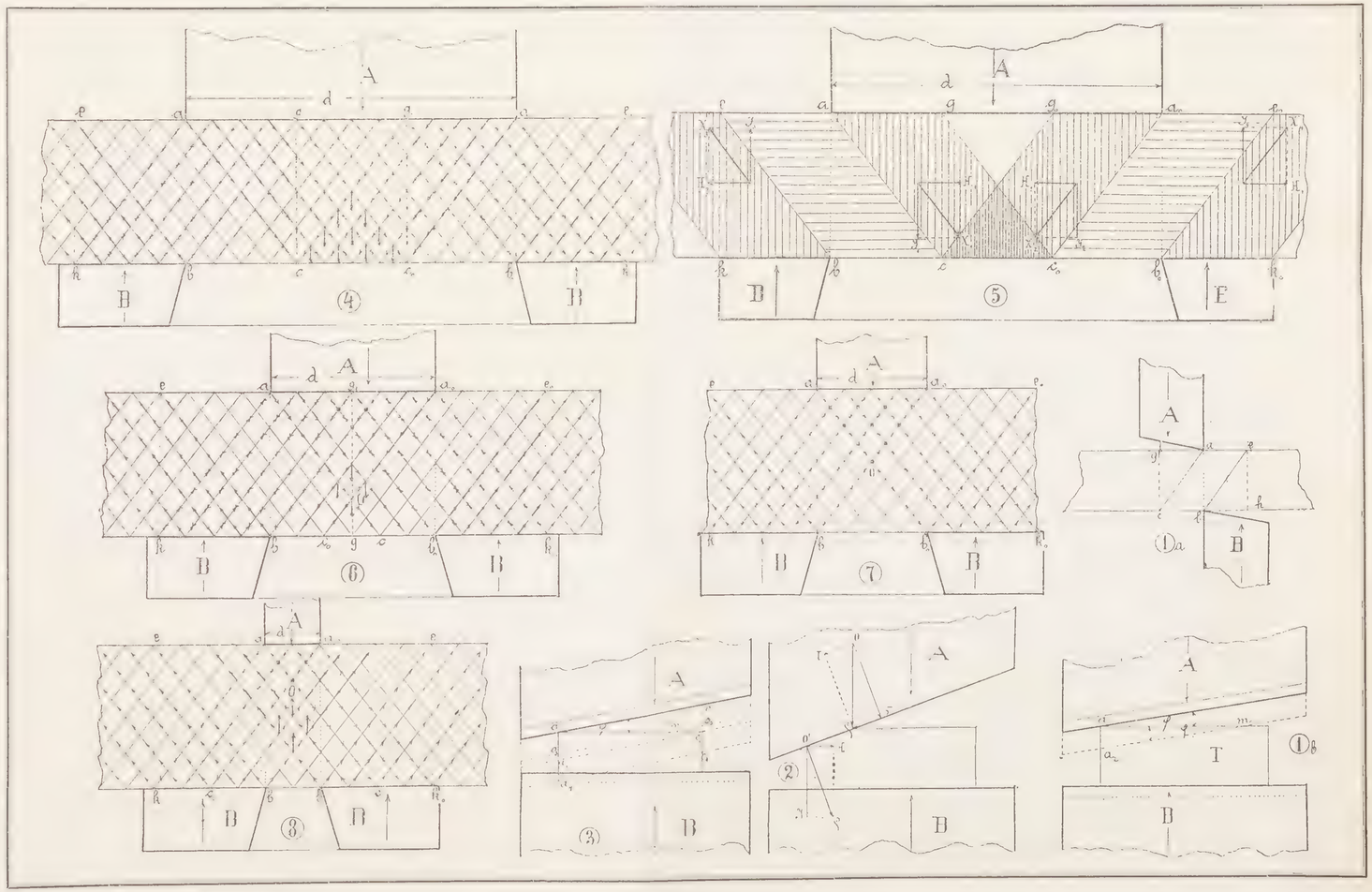
Zink. $\operatorname{tg}\beta = 1{\cdot}_{19}$, $\lambda = 0{\cdot}_{1}$ Q kg $= 43{\cdot}_{25}$ Q mm, ν $20{\cdot}_{55}$. | **Graues Gusseisen.** $\operatorname{tg}\beta$ $21{\cdot}_{32}$, $\lambda = 0{\cdot}_{10}$.

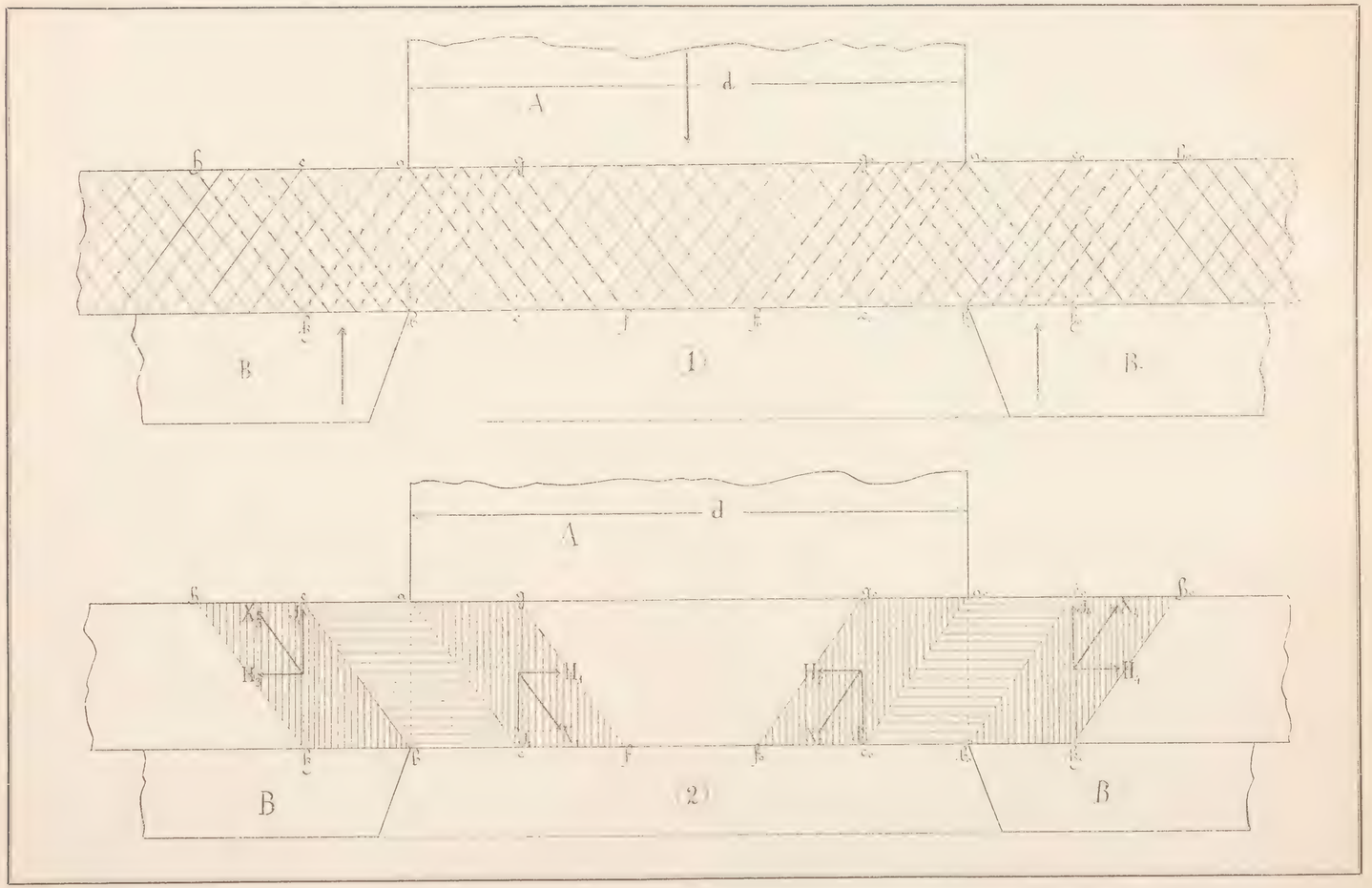
Marken der Theilpunkte	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	
λ_D	0	$0{\cdot}_{02}$	$0{\cdot}_{04}$	$0{\cdot}_{06}$	$0{\cdot}_{08}$	$0{\cdot}_{10}$	$0{\cdot}_{12}$	$0{\cdot}_{14}$	0	$0{\cdot}_{05}$	$0{\cdot}_{10}$	$0{\cdot}_{15}$	$0{\cdot}_{20}$	$0{\cdot}_{245}$
D_x mm	$12{\cdot}_{0}$	$12{\cdot}_{24}$	$12{\cdot}_{48}$	$12{\cdot}_{72}$	$12{\cdot}_{96}$	$13{\cdot}_{2}$	$13{\cdot}_{44}$	$13{\cdot}_{70}$	$4{\cdot}_{12}$	$4{\cdot}_{32}$	$4{\cdot}_{53}$	$4{\cdot}_{74}$	$4{\cdot}_{95}$	$5{\cdot}_{13}$
Δ_x mm²	$113{\cdot}_{1}$	$117{\cdot}_{5}$	$122{\cdot}_{2}$	$127{\cdot}_{0}$	$132{\cdot}_{0}$	$136{\cdot}_{85}$	$141{\cdot}_{8}$	$147{\cdot}_{50}$	$13{\cdot}_{33}$	$14{\cdot}_{66}$	$16{\cdot}_{12}$	$17{\cdot}_{65}$	$19{\cdot}_{24}$	$20{\cdot}_{67}$
Nf (1 kg = 1 mm)	$1{\cdot}_{516}$	$10{\cdot}_{84}$	$14{\cdot}_{2}$	$15{\cdot}_{7}$	$16{\cdot}_{55}$	$16{\cdot}_{8}$	$16{\cdot}_{8}$	$16{\cdot}_{8}$	49	65	$66{\cdot}_{2}$	$66{\cdot}_{2}$	$66{\cdot}_{2}$	$66{\cdot}_{2}$
$Nf \operatorname{tg}\beta$	$1{\cdot}_{805}$	$12{\cdot}_{9}$	$16{\cdot}_{9}$	$18{\cdot}_{7}$	$19{\cdot}_{7}$	$20{\cdot}_{0}$	$20{\cdot}_{0}$	$20{\cdot}_{0}$	65	$86{\cdot}_{2}$	$87{\cdot}_{7}$	$87{\cdot}_{7}$	$87{\cdot}_{7}$	$87{\cdot}_{7}$
δ_x mm	$18{\cdot}_{21}$	$17{\cdot}_{52}$	$16{\cdot}_{87}$	$16{\cdot}_{22}$	$15{\cdot}_{6}$	$15{\cdot}_{05}$	$14{\cdot}_{5}$	$13{\cdot}_{94}$	$2{\cdot}_{55}$	$2{\cdot}_{32}$	$2{\cdot}_{11}$	$1{\cdot}_{92}$	$1{\cdot}_{77}$	$1{\cdot}_{65}$
n	—	—	—	—	—	—	—	—	—	$2{\cdot}_{47}$	$2{\cdot}_{84}$	$3{\cdot}_{16}$	$3{\cdot}_{58}$	$4{\cdot}_{12}$
Z	—	—	—	—	—	—	—	—	—	$1{\cdot}_{02}$	$1{\cdot}_{048}$	$1{\cdot}_{073}$	$1{\cdot}_{105}$	$1{\cdot}_{142}$
Qmm (Versuchswerthe)	$6{\cdot}_{7}$	$31{\cdot}_{9}$	$43{\cdot}_{9}$	$50{\cdot}_{0}$	$54{\cdot}_{5}$	$57{\cdot}_{8}$	$60{\cdot}_{2}$	$62{\cdot}_{4}$	$22{\cdot}_{9}$	$31{\cdot}_{2}$	$36{\cdot}_{8}$	$39{\cdot}_{3}$	$40{\cdot}_{6}$	$41{\cdot}_{5}$
Qmm (Rechn.-Werthe)	$4{\cdot}_{72}$	$35{\cdot}_{1}$	$47{\cdot}_{7}$	$54{\cdot}_{7}$	$60{\cdot}_{0}$	$63{\cdot}_{0}$	$65{\cdot}_{5}$	$66{\cdot}_{7}$	$20{\cdot}_{0}$	$30{\cdot}_{0}$	$34{\cdot}_{3}$	$38{\cdot}_{4}$	—	—
δ_x mm	$11{\cdot}_{72}$	$11{\cdot}_{27}$	$10{\cdot}_{83}$	$10{\cdot}_{43}$	$10{\cdot}_{06}$	$\lambda=0{\cdot}_{087}$ $9{\cdot}_{67}$			$3{\cdot}_{96}$	$3{\cdot}_{6}$	$3{\cdot}_{24}$	$3{\cdot}_{0}$	$\lambda=0{\cdot}_{175}$ $2{\cdot}_{80}$	
n	—	—	—	—	—	—			—	—	—	$2{\cdot}_{03}$	$2{\cdot}_{25}$	
Z	—	—	—	—	—	—			—	—	—	$1{\cdot}_{0004}$	$1{\cdot}_{007}$	
Qmm (Versuchswerthe)	$4{\cdot}_{85}$	$36{\cdot}_{9}$	$49{\cdot}_{0}$	$56{\cdot}_{4}$	$61{\cdot}_{7}$	$63{\cdot}_{0}$			$20{\cdot}_{5}$	$29{\cdot}_{4}$	$33{\cdot}_{3}$	$34{\cdot}_{2}$	$34{\cdot}_{7}$	
Qmm (Rechn.-Werthe)	$6{\cdot}_{85}$	$36{\cdot}_{9}$	$49{\cdot}_{0}$	$56{\cdot}_{4}$	$61{\cdot}_{7}$	$63{\cdot}_{0}$			20	$29{\cdot}_{3}$	$33{\cdot}_{0}$	$35{\cdot}_{2}$	$37{\cdot}_{6}$	
δ_x mm	$6{\cdot}_{24}$	$6{\cdot}_{00}$	$5{\cdot}_{76}$	$5{\cdot}_{56}$	$\lambda=0{\cdot}_{064}$ $5{\cdot}_{52}$				$6{\cdot}_{14}$	$5{\cdot}_{6}$	$\lambda=0{\cdot}_{067}$ $5{\cdot}_{44}$			
n	$2{\cdot}_{18}$	$2{\cdot}_{3}$	$2{\cdot}_{48}$	$2{\cdot}_{56}$	$2{\cdot}_{79}$				—	—	—			
Z	$1{\cdot}_{01}$	$1{\cdot}_{018}$	$1{\cdot}_{03}$	$1{\cdot}_{04}$	$1{\cdot}_{044}$				—	—	—			
Qmm (Versuchswerthe)	$2{\cdot}_{77}$	$30{\cdot}_{0}$	$53{\cdot}_{2}$	$61{\cdot}_{7}$	$63{\cdot}_{5}$				$20{\cdot}_{0}$	$27{\cdot}_{3}$	$29{\cdot}_{3}$			
Qmm (Rechn.-Werthe)	$4{\cdot}_{8}$	$30{\cdot}_{6}$	$42{\cdot}_{2}$	$49{\cdot}_{1}$	$52{\cdot}_{2}$				20	$29{\cdot}_{2}$	$32{\cdot}_{7}$			

$\delta_0 = 18{\cdot}_{21}$ $\delta_0 = 2{\cdot}_{55}$ $\delta_0 = 11{\cdot}_{72}$ $\delta_0 = 13{\cdot}_{96}$ $\delta_0 = 6{\cdot}_{24}$ $\delta_0 = 6{\cdot}_{14}$




A
T
B
α·90°
①a
⑨a
②
③
⑤
①b
⑨b
⑩
⑥
⑦
④
Q
⑧
⑪


A
B
④
⑤
⑥
⑦
⑧
①a
①b
②
③
T
E


A
d
B
1)
B
A
d
B
2)
B

Verlag von **Arthur Felix** in Leipzig.

Technische Thermodynamik

von

Dr. Gustav Zeuner,

kgl. sächs. Geheimer Rath und Professor an der kgl. technischen Hochschule zu Dresden.

Dritte vollständig neu bearbeitete Auflage der
„Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie."

In zwei Bänden.

Erster Band.

Fundamentalsätze der Thermodynamik. Lehre von den Gasen.

Mit 73 in den Text gedruckten Holzschnitten. In gr. 8. 1887. Brosch. Preis ℳ 13,—.

Zweiter Band.

Die Lehre von den Dämpfen.

Mit 48 in den Text gedruckten Holzschnitten. In gr. 8. 1890. Brosch. Preis ℳ 14,—.

Beide Theile in einen Halbfranzband gebunden ℳ 29,50.

Das Maschinenwesen.

Elementares Lehrbuch

zur Einführung in die Maschinenwissenschaften, die Kinematik und die Elastizitäts- und Festigkeitslehre

für Studirende und zum Selbstunterricht

bearbeitet von

Oscar Hoppe,

Professor an der kgl. Bergakademie zu Clausthal.

Mit 92 Abbildungen im Text. In Lex.-8. 1895. XV, 152 S. Brosch. Preis ℳ 5,40.

Die Bewegung der Wärme

in den Cylinderwandungen der Dampfmaschine.

Von

Professor **Dr. Kirsch.**

Mit 7 lithogr. Tafeln. In Lex.-8. 1886. IX, 100 S. Brosch. Preis ℳ 6,—.

Die Maschinenfabrikation.

Entwurf, Kritik, Herstellung und Veranschlagung

der gebräuchlichsten Maschinen-Elemente.

Von

H. v. Reiche,

Ingenieur und ordentlicher Lehrer des Maschinenbaues an der königlichen Rheinisch-Westphälischen Polytechnischen Schule zu Aachen.

Zweite umgearbeitete und stark vermehrte Auflage.

Mit in den Text gedruckten Holzschnitten und einem Atlas von 70 lithogr. Tafeln.
In gr. 8. 1876. XXIV, 579 S. Brosch. Preis ℳ 40,—.

Verlag von **Arthur Felix** in Leipzig.

Das Gesetz
der
proportionalen Widerstände und seine Anwendungen.
Nebst Versuchen
über das Verhalten verschiedener Materialien bei gleichen Formänderungen
sowohl unter der Presse als dem Schlagwerk.

Von
Friedrich Kick,
k. k. Regierungsrath und ordentlichem öffentlichen Professor der mechanischen Technologie
an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.

Mit 3 lithographirten Tafeln und 44 Holzschnitten.
In gr. 8. 1885. X, 118 Seiten Brosch. Preis ℳ 6,—.

Lehrbuch der Kinematik.
Für Studirende
der Maschinentechnik, Mathematik und Physik
geometrisch dargestellt
von
Dr. L. Burmester,
Professor an der kgl. sächs. technischen Hochschule zu Dresden.

Erster Band: **Die ebene Bewegung.**

Mit einem Atlas von 57 lithogr. Taf. In gr. 8. 1888. XX, 942 S. Brosch. Preis ℳ 57,—.

Elementares Lehrbuch der Technischen Mechanik
für Studirende und zum Selbstunterricht
bearbeitet von
Oscar Hoppe,
Professor an der kgl. Bergakademie zu Clausthal.

Erste Abtheilung.
Mechanik des Punktes. — Mechanik der Körper.

Mit 453 Abbildungen im Text. In Lex.-8. 1894. XIV, 361 S. Brosch. Preis ℳ 11,—.

Zweite Abtheilung.
Mechanik der tropfbaren und gasförmigen Flüssigkeiten.

Mit 106 Abbildungen im Text. In Lex.-8. 1895. XI, 135 S. Brosch. Preis ℳ 4,50.
Beide Theile in einen Halbfranzband gebunden Preis ℳ 18,—.

Versuch einer graphischen Dynamik.
Von
Dr. R. Proell,
Ingenieur der Niederschlesischen Maschinenbau-Gesellschaft in Görlitz.

Mit einem Atlas von 10 lithogr. Taf. In gr. 8. 1874. XII, 212 S. Brosch. Preis ℳ 8,—.

Halle a. S., Buchdruckerei des Waisenhauses.

1.9

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Rejtö, Alexander

Die innere Reibung der festen Körper als Beitrag zur theoretischen mech. Technologie

Leipzig 1897

Techn. 177 mn
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11823906-2